

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5	6	Σ

ОДМАХ ПОПУНИТИ ЛИСТИЋ ИЗ КОВЕРТЕ, ВРАТИТИ ГА У КОВЕРТУ И ЗАЛЕПИТИ ЈЕ.

На квалификационом испиту се може користити **искључиво** плава хемијска оловка.

Било каква литература или папир који није добијен од дежурног на испиту **нису дозвољени**.

Употреба калкулатора, мобилних телефона и других електронских уређаја **није дозвољена**.

Испит траје три сата.

1. Наћи вредност израза

$$\frac{3 : \frac{2}{5} - 0.09 : \left(0.15 : 2\frac{1}{2}\right)}{0.32 \cdot 6 + 0.03 - (5.3 - 3.88) + 0.67}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \frac{3 : \frac{2}{5} - 0.09 : \left(0.15 : 2\frac{1}{2}\right)}{0.32 \cdot 6 + 0.03 - (5.3 - 3.88) + 0.67} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{5}{2} - \frac{9}{100} : \left(\frac{15}{100} : \frac{5}{2}\right)}{1.92 + 0.03 - 1.42 + 0.67} = \frac{\frac{15}{2} - \frac{9}{100} : \left(\frac{15}{100} \cdot \frac{2}{5}\right)}{1.2} \\ &= \frac{\frac{15}{2} - \frac{9}{100} : \frac{3}{50}}{1.2} = \frac{\frac{15}{2} - \frac{9}{100} \cdot \frac{50}{3}}{1.2} \\ &= \frac{\frac{15}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{6}{5}} = \frac{12}{2} \cdot \frac{5}{6} \boxed{= 5}. \end{aligned}$$

2. Решити једначину

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = \sqrt[3]{27^{2x+17}}.$$

Решење:

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = \sqrt[3]{27^{2x+17}},$$

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = \sqrt[3]{(3^3)^{2x+17}},$$

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = \sqrt[3]{3^3(2x+17)},$$

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = \sqrt[3]{(3^{2x+17})^3},$$

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} = 3^{2x+17},$$

$$\frac{2x-13}{x+1} = 2x+17,$$

$$2x-13 = (2x+17)(x+1),$$

$$2x^2 + 17x + 30 = 0,$$

$$\boxed{x = -6} \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{5}{2}}.$$

3. Решити неједначину

$$\sqrt{x^2 + 8} + 2x \leq 2 + 3|x|.$$

Решење: Како је

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

разликоваћемо два случаја.

1° За $x \geq 0$ имамо редом

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 8} + 2x &\leq 2 + 3x, \\ \sqrt{x^2 + 8} &\leq 2 + x, \\ x^2 + 8 &\leq 4 + 4x + x^2, \\ 4x - 4 &\geq 0, \end{aligned}$$

одакле је $x \in [1, +\infty)$.

2° За $x < 0$ добијамо

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 8} + 2x &\leq 2 - 3x, \\ \sqrt{x^2 + 8} &\leq 2 - 5x, \\ x^2 + 8 &\leq 4 - 20x + 25x^2, \\ 24x^2 - 20x - 4 &\geq 0, \\ 6x^2 - 5x - 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

одакле је $x \in (-\infty, -1/6]$.

Решење неједначине је $x \in (-\infty, -1/6] \cup [1, +\infty)$.

4. Наћи:

а) $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ и $\cot \alpha$ ако је $\cos \alpha = -1/6$ и $\sin \alpha < \cos \alpha$;

б) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\cot \alpha$ ако је $\tan \alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha \in (0, \pi)$;

в) $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ и $\cot \alpha$ ако је $\sin \alpha = 5/13$ и $\alpha \in [\pi/4, \pi]$.

Решење: а) На основу тригонометријског идентитета $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ одређујемо

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6} \quad \vee \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}.$$

Због услова $\sin \alpha < \cos \alpha$ добијамо $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Даље имамо: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{35}$, $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{35}}{35}$.

б) Из основног тригонометријског идентитета добијамо:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \\ \tan^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}, \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Према томе, на основу задатог услова $\alpha \in (0, \pi)$ важи $\sin \alpha > 0$, па је

$$\sin \alpha = +\sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2}{1 + 2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{тј.} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Даље, како је $\sin \alpha > 0$ и $\tan \alpha > 0$, мора да важи и $\cos \alpha > 0$, па је

$$\cos \alpha = +\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Коначно, $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

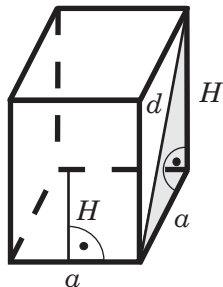
в) Из услова $\alpha \in [\pi/4, \pi]$ знамо да је $\sin \alpha \geq \cos \alpha$, па је

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}}, \quad \text{тј.} \quad \cos \alpha = -\frac{12}{13},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

5. Основа праве призме је ромб. Омотач износи 48, дијагонала стране 5, а најкраће растојање између наспрамних страна је једнако висини призме. Израчунати запремину призме.

Решење: Страна ромба је означена са a , дијагонала стране са d . Призма је права, па се висина призме H поклапа са њеном ивицом. Такође, најкраће растојање између наспрамних страна је једнако висини ромба, што значи да је и висине ромба једнака висини призме H .



Страна призме је правоугаоник страница a , H и њена површина је $S = aH$. Основа призме је ромб, па призма има четири једнаке стране и према услову задатка следи да је омотач $M = 4S = 4aH = 48$. Још, према Питагориној теорему, из услова $d = 5$ следи $d^2 = a^2 + H^2 = 25$. Дакле, добијамо систем једначина

$$4aH = 48, \quad a^2 + H^2 = 25.$$

Из прве једначине је $a = 12/H$, што заменом у другу даје

$$H^4 - 25H^2 + 144 = 0.$$

Добијена једначина је биквадратна и решава се сменом $t = H^2$, после које постаје квадратна једначина

$$t^2 - 25t + 144 = 0.$$

Решења квадратне једначине су

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2},$$

тј. $t_1 = 16$, $t_2 = 9$, па су решења биквадратне једначине

$$H_1 = \sqrt{t_1} = 4, \quad H_2 = \sqrt{t_2} = 3.$$

Даље је

$$a_1 = \frac{12}{H_1} = 3, \quad a_2 = \frac{12}{H_2} = 4.$$

За висину H и страницу a ромба важи $H \leq a$, па је

$$H = H_2 = 3, \quad a = a_2 = 4.$$

База призме је

$$B = aH = 12$$

и за запремину се добија

$$\boxed{V = BH = 36}.$$

6. Наћи колико има рационалних сабирака у биномном развоју израза

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{20}.$$

Решење: По биномној формули је

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{20} = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} 2^{\frac{i}{2}} \cdot 3^{\frac{20-i}{3}}.$$

Да би сабирак у наведеној суми био рационалан број, изложиоци у степенима бројева 2 и 3 морају да буду цели бројеви. Зато тражимо све оне бројеве $i \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ који су дељиви са 2 (парни), и истовремено је разлика $20 - i$ дељива са 3. То су бројеви 2, 8, 14, 20. У супротном, члан у биномном развоју је производ једног рационалног броја са неким од бројева $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$, који су ирационални. Дакле, у посматраном биномном развоју има четири рационална сабирка.