УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ
Први уписни рок **9. септембар 2024.**

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5	6	Σ

ОДМАХ ПОПУНИТИ ЛИСТИЋ ИЗ КОВЕРТЕ, ВРАТИТИ ГА У КОВЕРТУ И ЗАЛЕПИТИ ЈЕ.

На квалификационом испиту се може користити **искључиво** плава хемијска оловка.

Било каква литература или папир који није добијен од дежурног на испиту **нису дозвољени**.

Употреба калкулатора, мобилних телефона и других електронских уређаја **није дозвољена**.

Испит траје три сата.

1. Наћи вредност израза

$$\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(2:2\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{9}{32}.$$

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(2:2\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{9}{32}\\
&= \left(\frac{2}{15}+\frac{19}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(2:\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{9}{32}\\
&= \frac{2\cdot 4+19\cdot 5}{60}\cdot\frac{30}{103}-\left(2\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{9}{32}\\
&= \frac{103}{60}\cdot\frac{30}{103}-\frac{2\cdot 4}{9}\cdot\frac{9}{32}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2. Решити једначину

$$\sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-5}\,-x-3=0.$$

Једначина има смисла за $x+1\geq 0,\ 2x-5\geq 0$ и $x+3\geq 0$, што коначно даје $x\geq \frac{5}{2}$. Квадрирањем једначине

$$\sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-5}=x+3,$$

добијамо квадратну једначину

$$x^2-9x-14=0,$$

чија суречења $x_1=\dfrac{9-\sqrt{137}}{2}$ и $x_2=\dfrac{9+\sqrt{137}}{2}$. С обзиром на услов $x\geq\dfrac{5}{2}$, следи да дата једначина има јединствено решење $x=\dfrac{9+\sqrt{137}}{2}$.

3. Решити неједначину
$$5^{-x} < 25^{-\frac{1}{x+1}}.$$

Неједначина је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Трансформацијом неједначине следи:
$$\begin{aligned} 5^{-x} < 25^{-\frac{1}{x+1}} \quad &\Leftrightarrow \quad 5^{-x} < 5^{-\frac{2}{x+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad -x < -\frac{2}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x^2+x-2}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{(x-1)(x+2)}{x+1}. \end{aligned}$$
Решавајући последњу неједначину добијамо да је решење полазне неједначине $x \in (-2,-1) \cup (1,+\infty)$.

4. Наћи:

а) $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ и $\cot\alpha$ ако је $\cos\alpha = -1/6$ и $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\cot\alpha$ ако је $\tan\alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha \in (0, \pi)$.

а) Из основног тригонометријског идентитета имамо

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6} \quad \vee \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}.$$

Из услова $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ добијамо $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Даље је

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{35}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{35}}{35}.$$

б) На основу познатих тригонометријских идентитета добијамо

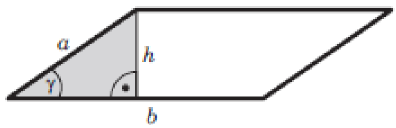
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \vee \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Како је $\alpha \in (0, \pi)$ и $\tan\alpha > 0$, важи $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Основа правог паралелопипеда (четворостране призме) је паралелограм са страницама $a = 3$, $b = 8$ и захваћеним углом $\gamma = 30°$. Ако је омотач $M = 220$, израчунати површину и запремину паралелопипеда.

На слици је приказана само основа паралелопипеда са висином h која одговара страници b.



Висина h паралелограма се одређује из $h/a = \sin\gamma$ и добија се

$$h = a\sin\gamma = 3\sin 30° = \frac{3}{2},$$

па је база

$$B = bh = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12.$$

Различите стране паралелопипеда су

$$S_1 = aH = 3H, \quad S_2 = bH = 8H,$$

где је H висина паралелопипеда. Паралелопипед има једнаке наспрамне стране, па је омотач

$$M = 2S_1 + 2S_2 = 22H = 220,$$

одакле је висина

$$H = 10.$$

Површина и запремина паралелопипеда су

$$P = 2B + M = 24 + 220 = 244, \quad V = BH = 12 \cdot 10 = 120.$$

6. Израчунати вредност израза (рационалисати именилац)

$$\frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\\
&=\frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\\
&=\frac{2+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\
&=\frac{10+\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ 9. септембар 2024.

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

(Презиме, име једног родитеља и име)

(Уписни број)

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ 9. септембар 2024.

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

(Презиме, име једног родитеља и име)

(Уписни број)

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ 9. септембар 2024.

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

(Презиме, име једног родитеља и име)

(Уписни број)