УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ
Први уписни рок **27. јун 2024.**

КВАЛИФИКАЦИОНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5	6	Σ

ОДМАХ ПОПУНИТИ ЛИСТИЋ ИЗ КОВЕРТЕ, ВРАТИТИ ГА У КОВЕРТУ И ЗАЛЕПИТИ ЈЕ.

На квалификационом испиту се може користити **искључиво** плава хемијска оловка.

Било каква литература или папир који није добијен од дежурног на испиту **нису дозвољени**.

Употреба калкулатора, мобилних телефона и других електронских уређаја **није дозвољена**.

Испит траје три сата.

1. Израчунати

$$\left(\left(\left(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\right):2^{-\frac{5}{4}}\right):\left(16:\left(5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right)^{\frac{1}{5}}.$$

$$A=\left(\left(\left(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\right):2^{-\frac{5}{4}}\right):\left(16:\left(5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}}{2^{-\frac{5}{4}}}:\frac{16}{5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}}{2^{-\frac{5}{4}}}\cdot\frac{5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{16}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{4}}\cdot 5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\left(2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{4}-4}\cdot 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}+2}\right)^{\frac{1}{5}}=2^{-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}}\cdot 3^{3\cdot\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\boxed{2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}}.$$

2. Решити једначину

$$\sqrt{x^2-2x+9}+2x=4+3|x-1|.$$

Једначина је дефинисана на $\mathbb{R}$ јер је $x^2-2x+9>0$ за све реалне бројеве x.

Како је $|x-1|=\begin{cases} x-1, & x-1\geq 0, \\ -x+1, & x-1<0, \end{cases}$ разликују се два случаја.

За $x\geq 1$ имамо редом

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-2x+9}+2x&=4+3(x-1), \\ \sqrt{x^2-2x+9}&=x+1, \\ x^2-2x+9&=x^2+2x+1, \\ 4x&=8, \\ x&=2. \end{aligned}$$

За $x<1$ једначина се своди на

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-2x+9}+2x&=4+3(-x+1), \\ \sqrt{x^2-2x+9}&=-5x+7. \end{aligned}$$

Последња једначина има смисла јер је $-5x+7>0$. Њеним квадрирањем добија се

$$\begin{aligned} x^2-2x+9&=25x^2-70x+49, \\ 24x^2-68x+40&=0, \\ 6x^2-17x+10&=0, \end{aligned}$$

па су могућа решења $x=\dfrac{5}{6}$ и $x=2$. Друго решење се одбацује, јер не задовољава услов $x<1$.

Коначно, решења једначине су $\boxed{x=2}$ и $\boxed{x=\dfrac{5}{6}}$.

3. Решити неједначину

$$49^{x+2} + 6 \cdot 7^{x+1} - 6^{-\log_6 7} < 0.$$

Трансформишући неједначину добијамо

$$\begin{aligned} 49^{x+2} + 6 \cdot 7^{x+1} - 6^{-\log_6 7} &< 0, \\ 7^{2(x+2)} + 6 \cdot 7^{x+1} - 6^{\log_6 (1/7)} &< 0, \\ 7^{2x+4} + 6 \cdot 7^{x+1} - \frac{1}{7} &< 0, \\ 7^{2(x+2)+1} + 6 \cdot 7^{x+2} - 1 &< 0. \end{aligned}$$

Увођењем смене $7^{x+2} = t$ неједначина постаје

$$7t^2 + 6t - 1 < 0$$

и њено решење је $-1 < t < \dfrac{1}{7}$. Како је $t = 7^{x+2} > 0$, имамо

$$0 < 7^{x+2} < 7^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\infty < x + 2 < -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\infty < x < -3,$$

па је решење полазне неједначине $\boxed{x \in (-\infty, -3)}$.

4. Решити једначину

$$\sin x - \sin\frac{x}{5} + 1 = 2\cos^2\frac{3x}{10}.$$

Применом формула

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{и} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

једначина може да се трансформише на следећи начин

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{2x}{5}\cos\frac{3x}{5} - \cos\frac{3x}{5} &= 0, \\ \cos\frac{3x}{5}\left(2\sin\frac{2x}{5} - 1\right) &= 0, \end{aligned}$$

одакле се добијају две класе решења: за $\cos\frac{3x}{5} = 0$ и за $2\sin\frac{2x}{5} - 1 = 0$.

$1^\circ \quad \cos\frac{3x}{5} = 0$

$$\frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{5}{3}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in ,$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + \frac{5k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}};$$

$2^\circ \quad 2\sin\frac{2x}{5} - 1 = 0$

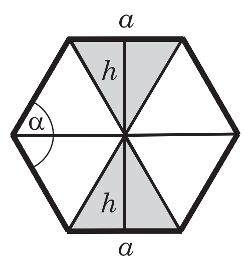
$$\sin\frac{2x}{5} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2x}{5} = \frac{\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \frac{2x}{5} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{12} + 5m\pi,\ m \in \mathbb{Z}} \quad \vee \quad \boxed{x = \frac{25\pi}{12} + 5n\pi,\ n \in \mathbb{Z}}.$$

5. Растојање између паралелних страница правилног шестоугла је $d = 2\sqrt{3}$. Израчунати обим и површину шестоугла.

Симетрале углова правилног шестоугла се секу у истој тачки и формирају шест троуглова који са шестоуглом имају заједничку по једну страницу a.



Имајући у виду једнакост углова у правилном n–тоуглу, израчунавамо угао правилног шестоугла

$$\alpha = \frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Симетрала угла полови угао, па сви троуглови имају по два једнака угла $\alpha/2 = 60^\circ$, што значи да су једнакостранични. Како су странице троуглова једнаке страници a шестроугла, они су и подударни.
Ако је h висина троугла, из утврђене подударности и услова задатка следи

$$d = 2h = 2\sqrt{3}, \quad h = \sqrt{3}.$$

За висину једнакостраничног троугла важи

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

одакле је

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 2.$$

Обим шестоугла је

$$O = 6a = 12.$$

Површина једног троугла је

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3},$$

па је површина шестоугла

$$P = 6P_1 = 6\sqrt{3}.$$

6. Доказати да је

$$\frac{\sqrt[4]{0.98}-\sqrt[4]{0.02}}{\sqrt[4]{0.98}+\sqrt[4]{0.02}}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}.$$

Полазећи од леве стране дате једнакости добијамо

$$\frac{\sqrt[4]{0.98}-\sqrt[4]{0.02}}{\sqrt[4]{0.98}+\sqrt[4]{0.02}}=\frac{\sqrt[4]{\frac{98}{100}}-\sqrt[4]{\frac{2}{100}}}{\sqrt[4]{\frac{98}{100}}+\sqrt[4]{\frac{2}{100}}}=\frac{\frac{\sqrt[4]{49}}{\sqrt[4]{50}}-\frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{50}}}{\frac{\sqrt[4]{49}}{\sqrt[4]{50}}+\frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{50}}}=\frac{\sqrt[4]{49}-\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{49}+\sqrt[4]{1}}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\cdot\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1}=\frac{7-2\sqrt{7}+1}{7-1}$$

$$=\frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3},$$

што је и требало доказати.