

**UNIVERZITET U NIŠU  
ELEKTRONSKI FAKULTET**

---

**Marjan M. Matejić  
Lidija V. Stefanović  
Branislav M. Randelović  
Igor Ž. Milovanović**

---

**MATEMATIKA**  
**KOMPLETI ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT**

**2011.**

---

**Edicija: Pomoćni udžbenici**

**Marjan Matejić, Lidija Stefanović,  
Branislav Ranđelović, Igor Milovanović**  
**MATEMATIKA –**  
**KOMPLETI ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT**

II izdanje, 2011.

**Recenzenti:** Prof. dr Milan Kovačević, Doc. dr Slađana Marinković

**Izdavač:** Elektronski fakultet u Nišu, P. fah 73, 18 000 Niš, Srbija,  
<http://www.elfak.ni.ac.rs>

**Glavni i odgovorni urednik:** Prof. dr Zoran H. Perić

**Tehnička obrada:** mr Marjan Matejić, dr Lidija Stefanović,  
mr Branislav Ranđelović

Odlukom Nastavno–naučnog veća Elektronskog fakulteta u Nišu,  
br. 07/05–008/10–003 od 6.5.2010. god.,  
rukopis je odobren za štampu kao pomoćni udžbenik.

**ISBN 978–86–6125–027–9**

CIP – Каталогизacija u publikaciji  
Narodna biblioteka Srbije, Beograd  
51(079.1)  
**MATEMATIKA:** kompleti zadataka za prijemni ispit/  
Marjan M. Matejić ... [et al.]. –  
2. izd. – Niš: Elektronski fakultet, 2011 (Niš: Unigraf). –  
V, 150 str.: graf. prikazi; 24 cm. –  
(Edicija Pomoćni udžbenici/ [Elektronski fakultet, Niš])  
Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Nišu. –  
Tiraž 300. – Bibliografija: str. 149–150.  
ISBN 978–86–6125–027–9  
1. Матејић, Марјан М., 1977 – [аутор]  
а) Математика – Задаци  
COBISS.SR-ID 183010060

**Štampa:** Unigraf – Niš

**Tiraž:** 300 primeraka

*Bilo kakvo umnožavanje ove knjige ili njenih delova nije dozvoljeno bez pisanog odobrenja izdavača.*

## PREDGOVOR PRVOG IZDANJA

Ova zbirka sadrži zadatke iz onih oblasti elementarne matematike koje su obuhvaćene programom prijemnog ispita na tehničkim i prirodno–matematičkim fakultetima. Cilj zbirke je da čitalac, rešavajući testove, obnovi gradivo iz ovih oblasti i da se na taj način pripremi za uspešno polaganje prijemnog ispita iz matematike.

U prvom delu zbirke je dat kratak pregled teorije, neposredno vezane za zadatke. Teorijske činjenice koje su izostavljene, a potrebne su za rešavanje zadataka, navedene su ili izvedene u okviru rešenja. Drugi deo sadrži tekstove zadataka. Svi zadaci su pažljivo odabrani, prilagođeni nameni zbirke i grupisani u komplete kakvi se polažu na ispitu. Prilikom odabira zadataka, osim navedene literature, korišćeni su i časopisi "Rozhledy" (Češka), "Gazeta Matematica" (Rumunija), "Elemente der Mathematik" (Švajcarska), "Matematika v škole" (Rusija), "Tangenta" (Novi Sad) i "Triangle" (Sarajevo). Rešenja zadataka se nalaze u trećem delu zbirke.

Poslednji deo zbirke obuhvata tekstove zadataka sa ranijih prijemnih ispita iz matematike na Elektronskom fakultetu u Nišu, u periodu od 1989. do 2009. godine. Rešenja ovih zadataka mogu se naći u [14].

"MATEMATIKA – kompleti zadataka za prijemni ispit" je prvenstveno namenjena kandidatima koji se pripremaju za polaganje prijemnog ispita na Elektronskom fakultetu u Nišu, ali bi mogla da bude od koristi i kandidatima za ostale tehničke i prirodno–matematičke fakultete na kojima se u okviru prijemnog ispita polaže matematika.

Zahvaljujemo se recenzentima, prof. dr Milanu Kovačeviću i doc. dr Slađani Marinković, na korisnim sugestijama pri izradi zbirke.

Niš, 2010. g.

Autori

## **PREDGOVOR DRUGOG IZDANJA**

U odnosu na I izdanje, II izdanje je neznatno izmenjeno u smislu ispravke postojećih grešaka ili nekorektnosti, kao i zamene jednog zadatka u celini.

Autori se zahvaljuju saradnicima dr Lidiji Rančić, dr Dušanu Miloševiću i dr Vojkanu Davidoviću, kao i studentima, koji su učestvovali u uočavanju i otklanjanju grešaka.

Niš, 2011. g.

Autori

## SADRŽAJ

Podsetnik iz teorije	1
Tekstovi zadataka	13
Rešenja zadataka	43
Kompleti zadataka sa ranijih ispita	125
Literatura	149



**PODSETNIK  
IZ TEORIJE**





## 1. Oznake brojnih skupova

$\mathbb{N}$  - skup prirodnih brojeva ( $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ),  
 $\mathbb{Z}$  - skup celih brojeva,  
 $\mathbb{Q}$  - skup racionalnih brojeva,  
 $\mathbb{I}$  - skup iracionalnih brojeva,  
 $\mathbb{R}$  - skup realnih brojeva ( $\mathbb{R}^+$  - skup pozitivnih realnih brojeva,  $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ),  
 $\mathbb{C}$  - skup kompleksnih brojeva.

## 2. Apsolutna vrednost realnog broja

Neka su  $x, y, a$  i  $b$  realni brojevi. Tada je

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

gde je  $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ,  $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ .

Osnovne osobine:

$$|x| \geq 0; \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad |-x| = |x|; \quad |x|^2 = x^2; \quad -|x| \leq x \leq |x|;$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a; \quad |x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2; \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|;$$

$$|xy| = |x||y|; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; \quad |x + y| \leq |x| + |y|; \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$$

## 3. Stepen realnog broja

Stepen realnog broja  $a^m$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ) definiše se sa

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^m = a \cdot a^{m-1}, \quad (a \neq 0).$$

Osnovne osobine ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

$$(ab)^m = a^m b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}; \quad 0^m = 0; \quad 0^0 \text{ nije definisano.}$$

## 4. Koren realnog broja

Neka je  $x, y \in \mathbb{R}^+$  i  $n, m \in \mathbb{N}$ . Aritmetički  $n$ -ti koren broja  $x$  je jedinstveno pozitivno rešenje jednačine  $t^n = x$ . Označava se sa  $x^{1/n}$  ili  $\sqrt[n]{x}$ .

Osnovne osobine:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{x})^m; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^m = \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^m} = x^{-\frac{m}{n}}; \quad \sqrt[n]{0} = 0;$$

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}; \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = x^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}; \quad \sqrt[n]{1} = 1;$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ako je } n \text{ neparan broj,} \\ |a|, & \text{ako je } n \text{ paran broj.} \end{cases}$$

## 5. Celi racionalni izrazi i racionalizacija imenioca

$$\begin{aligned}
 (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2; & (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2; \\
 (x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3; & (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3; \\
 x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y); & x^2 + y^2 &= (x+y - \sqrt{2xy})(x+y + \sqrt{2xy}); \\
 x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2); & x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2); \\
 x-y &= (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}); & x+y &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}); \\
 x-y &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sqrt{y}} &= \frac{x\sqrt{y}}{y}; & \frac{x}{\sqrt[3]{y}} &= \frac{x\sqrt[3]{y^2}}{y}; & \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}; & \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}; \\
 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} &= \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x + y}; & \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}; \\
 x^{2n} + y^{2n} &= \left(x^n + y^n - \sqrt{2x^ny^n}\right) \left(x^n + y^n + \sqrt{2x^ny^n}\right); \\
 x^{2n} - y^{2n} &= (x-y) \left(x^{2n-1} + x^{2n-2}y + \dots + xy^{2n-2} + y^{2n-1}\right); \\
 x^{2n-1} + y^{2n-1} &= (x+y) \left(x^{2n-2} - x^{2n-3}y + \dots - xy^{2n-3} + y^{2n-2}\right); \\
 x^{2n-1} - y^{2n-1} &= (x-y) \left(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + xy^{2n-3} + y^{2n-2}\right); \\
 (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.
 \end{aligned}$$

## 6. Logaritam

Logaritam broja  $x$  za osnovu  $a$  je jedinstveno rešenje jednačine  $x = a^t$ . Označava se sa  $\log_a x = t$ . Uslovi egzistencije logaritma su  $x > 0$ ,  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Ako je  $a = 10$ , to je dekadni logaritam ( $\log_{10} x = \log x$ ). Ako je  $a = e$  ( $e \approx 2.71\dots$ ), to je prirodni logaritam ( $\log_e x = \ln x$ ).

Osnovne osobine:

$$\begin{aligned}
 a^{\log_a x} &= x; & \log_a a &= 1; & \log_a x^p &= p \log_a x; & \log_a x &= \frac{1}{\log_x a}; & \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}; \\
 \log_{a^p} x &= \frac{1}{p} \log_a x; & \log_{a^q} x^p &= \frac{p}{q} \log_a x; & \log_a \sqrt[n]{x} &= \frac{1}{n} \log_a x; & \log_a 1 &= 0; \\
 \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y; & \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y.
 \end{aligned}$$

## 7. Proporcije. Kamatni račun

Količnik veličina  $a$  i  $b$ ,  $b \neq 0$ , je razmera, a broj  $a : b$ , tj.  $\frac{a}{b}$  je vrednost razmere. Ako razmere  $a : b$  i  $c : d$  imaju istu vrednost, onda se kaže da čine proporciju

$$a : b = c : d,$$

a veličine  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  su članovi proporcije. Članovi  $a$  i  $d$  su spoljašnji, a  $b$  i  $c$  unutrašnji.  
Veličine  $a$  i  $b$  su direktno proporcionalne ako je

$$b = ka, \quad k > 0,$$

a obrnuto proporcionalne ako je

$$b = k\frac{1}{a}, \quad a \neq 0, \quad k > 0.$$

Osnovne osobine proporcije su:

$$a:b = c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow a = b\frac{c}{d},$$

$$a:b = c:d \Leftrightarrow d:b = c:a \Leftrightarrow a:c = b:d.$$

Ako je  $a : b = c : d$  i  $k \neq 0$ , tada je

$$(ak) : (bk) = c : d,$$

$$(a : k) : (b : k) = c : d,$$

$$(ak) : b = (ck) : d,$$

$$(a : k) : b = (c : k) : d.$$

Ako je  $a : b = c : d$  i ako su  $m$ ,  $n$ ,  $p$  i  $q$  brojevi različiti od nule, onda je

$$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d,$$

$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d),$$

$$(ma \pm nb) : (mc \pm nd) = (pa \pm qb) : (pc \pm qd).$$

Ako je

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1,$$

$$a_2 : b_2 = c_2 : d_2,$$

$$\vdots$$

$$a_n : b_n = c_n : d_n,$$

tada je

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) : (b_1 b_2 \cdots b_n) = (c_1 c_2 \cdots c_n) : (d_1 d_2 \cdots d_n).$$

Ako je

$$a : b = b : c,$$

tada je

$$b = \sqrt{ac}.$$

Ako je

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$$

6

i  $k_1, k_2, \dots, k_n$  brojevi različiti od nule, tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

i

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Proporcija

$$a : x = x : (a - x), \quad a > x,$$

naziva se zlatni presek.

Neka je  $G$  glavnica,  $p$  procenat i  $q$  procentni iznos. Tada je

$$G : q = 100 : p,$$

tj.

$$q = \frac{Gp}{100}.$$

Neka je  $G$  glavnica,  $p$  procenat,  $v$  vreme (u godinama ili danima) i  $I$  dobit (interes). Tada je

- za godine

$$I = \frac{Gpv}{100};$$

- za dane

$$I = \frac{Gpv}{36000}.$$

## 8. Kompleksan broj

Skup kompleksnih brojeva, u oznaci  $\mathbb{C}$ , je skup uređenih parova  $(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , u kome su definisane operacije sabiranje  $+$  i množenje  $\cdot$  na sledeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

U skupu  $\mathbb{C}$  je  $0 = (0, 0)$  kompleksna nula,  $1 = (1, 0)$  kompleksna jedinica, a  $i = (0, 1)$  imaginarna jedinica.

1°  $-z = (-x, -y)$  je *suprotan broj* broju  $z = (x, y)$ ;

2°  $\frac{1}{z} = z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$  je *inverzan broj* broju  $z = (x, y)$ , ( $z \neq (0, 0)$ );

3°  $\bar{z} = (x, -y)$  je *konjugovani broj* broju  $z = (x, y)$ .

Oduzimanje kompl. brojeva:  $z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ .

Deljenje kompl. brojeva:  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$ .

Kompleksan broj  $z = (x, y)$  u *normalnom obliku* je  $z = x + iy$ , gde je  $x = \operatorname{Re}(z)$  realan deo kompleksnog broja  $z$ , a  $y = \operatorname{Im}(z)$  imaginaran deo kompleksnog broja  $z$ . Pri tome je

$$\bar{z} = x - iy; \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Za dva kompleksna broja  $z_1 = x_1 + iy_1$  i  $z_2 = x_2 + iy_2$  važi

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2,$$

a rezultati računskih operacija nad njima su:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); & z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); & \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \\ \overline{\overline{z}} &= z; & \overline{z_1 \pm z_2} &= \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; & \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; & z\overline{z} &= x^2 + y^2; \end{aligned}$$

$$z^0 = 1, \quad z^m = z \cdot z^{m-1}, \quad z^{-m} = \frac{1}{z^m}, \quad i^n = \begin{cases} i, & n = 4k + 1, \\ -1, & n = 4k + 2, \\ -i, & n = 4k + 3, \\ 1, & n = 4k. \end{cases}$$

*Trigonometrijski oblik* kompleksnog broja je  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , a *eksponencijalni (Eulerov) oblik* je  $z = re^{i\varphi}$ , gde je  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  moduo (modul) kompleksnog broja, a  $\varphi = \arg(z)$  argument kompleksnog broja, pri čemu je

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \neq 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y > 0, \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ 0, & x > 0, y = 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Za konjugovani broj broja  $z$  važi  $\overline{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi}$ . Osobine modula:

$$|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0; \quad |z| = |\overline{z}|; \quad |z|^2 = z\overline{z}; \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|;$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

Moavrova formula  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi = e^{in\varphi}$ ;

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \sqrt[n]{1} &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \sqrt[n]{-1} &= \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \sqrt[n]{i} &= \cos \frac{(4k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

## 9. Kvadratna jednačina

Kvadratna jednačina je  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Diskriminanta kvadratne jednačine je  $D = b^2 - 4ac$ . U zavisnosti od znaka diskriminante, mogući su sledeći slučajevi:

$$D > 0 \Rightarrow \text{rešenja su realna i različita, } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{rešenja su realna i jednaka, } x_{1,2} = \frac{-b}{2a},$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{rešenja su konjugovano-kompleksna, } x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Vietove formule za kvadratnu jednačinu:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

Faktorizacija kvadratne jednačine:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

Kanonički oblik kvadratne funkcije:  $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , gde je tačka  $(\alpha, \beta)$

teme kvadratne funkcije i  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ,  $\beta = -\frac{D}{4a}$ .

## 10. Faktorijeli i binomni koeficijenti

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n \cdot (n-1)!, & n \geq 1; \end{cases} \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1;$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & k > n, \\ 1, & k = 0 \text{ ili } k = n, \\ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}, & n, k \in \mathbb{N} \text{ (ostali slučajevi);} \end{cases} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}; \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k;$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$\text{Važe jednakosti: } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ i } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

## 11. Trigonometrija

Osnovne jednakosti i veze između trigonometrijskih funkcija:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}.$$

Svođenje trigonometrijskih funkcija ma kog ugla na osnovni ugao:

$x$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2k\pi + \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

Adicione formule:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; & \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta; & \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}; & \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}; & \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}. \end{aligned}$$

Formule sa poluuglovima:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}; & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}; & \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; \\ \cot^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}; & \sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; & \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Transformacije zbira trigonometrijskih funkcija u proizvod i obrnuto:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; & \tan \alpha - \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \\ \cot \alpha + \cot \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; & \cot \alpha - \cot \beta &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Važnije vrednosti trigonometrijskih funkcija:

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\cot \alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

## 12. Planimetrija i stereometrija

**TROUGAO:** stranice  $a, b, c$ ; uglovi  $\alpha, \beta, \gamma$  naspramni stranicama  $a, b, c$  redom; poluprečnici upisanog i opisanog kruga  $r, R$ ;

*zbir uglova*  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ;

*poluobim i obim*  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ,  $O = a + b + c = 2s$ ;

*površina*  $P = \frac{ah}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs = \frac{abc}{4R}$ ,  
gde je  $h$  je visina koja odgovara stranici  $a$ .

**PRAVOUGLI TROUGAO:** katete  $a, b$ , hipotenuza  $c$ ;

*Pitagorina teorema*  $a^2 + b^2 = c^2$ ;

*poluprečnik opisanog kruga*  $R = \frac{c}{2}$ ;

*površina*  $P = \frac{ab}{2}$ .

**JEDNAKOKRAKI TROUGAO:** kraci (stranice)  $a = b$ ; uglovi  $\alpha = \beta$ .

**JEDNAKOSTRANIČNI TROUGAO:** stranice  $a = b = c$ ; uglovi  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ;

*visina*  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;

*poluprečnici upisanog i opisanog kruga*  $r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,  $R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ;

*obim i površina*  $O = 3a$ ,  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ;

*značajne tačke* (centri upisanog i opisanog kruga, težište, presek visina, preseki simetrala uglova i stranica) se poklapaju;

*značajne linije* (težišna linija, visina i simetrala stranice  $a$ , simetrala ugla  $\alpha$ ) se poklapaju.

**SLIČNI TROUGLOVI:** stranice paralelne; uglovi jednaki.

**PODUDARNI TROUGLOVI:** tri stranice jednake (pravilo SSS); jedna stranica i nalegli uglovi jednaki (pravilo USU); dve stranice i zahvaćeni ugao jednaki (pravilo SUS); dve stranice i ugao naspram veće od njih jednaki (pravilo SSU).

**PARALELOGRAM:** naspramne stranice  $a, c$  i  $b, d$  paralelne i  $a = c, b = d$ ; naspramni uglovi jednaki;

*obim i površina*  $O = 2a + 2b$ ,  $P = ah$ ,



gde je  $h$  visina koja odgovara stranici  $a$ .

PRAVOUGAONIK: uglovi  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ ;

*površina*  $P = ab$ .

ROMB: stranice  $a = b = c = d$ ; dijagonale  $d_1, d_2$  normalne i polove se; visina  $h$ ;

*poluprečnik upisanog kruga*  $r = \frac{h}{2}$ ;

*obim i površina*  $O = 4a, \quad P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ .

KVADRAT: stranice  $a = b = c = d$ ; uglovi  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ ;

*dijagonale*  $d_1 = d_2 = d = a\sqrt{2}$  normalne i polove se;

*poluprečnici upisanog i opisanog kruga*  $r = \frac{a}{2}, \quad R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;

*obim i površina*  $O = 4a, \quad P = a^2$ .

TRAPEZ: osnovice  $a, b$  paralelne, kraci  $c, d$ ;

*srednja linija*  $m = \frac{a+b}{2}$ ;

*površina*  $P = \frac{a+b}{2}h = mh$ ,

gde je  $h$  visina koja odgovara osnovicama.

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ: kraci  $c = d$ ; uglovi na osnovici jednaki; dijagonale jednake.

$n$ -TOUGAO (mnogougao sa  $n$  stranica):

*zbir uglova*  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .

PRAVILNI  $n$ -TOUGAO: stranice jednake; uglovi jednaki.

KRUŽNICA, KRUG (deo ravni ograničen kružnicom): poluprečnik  $r$ ;

*obim i površina kruga*  $O = 2r\pi, \quad P = r^2\pi$ ;

*dužina luka* (deo kružnice)  $l = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$ ;

*površina isečka* (deo kruga)  $P = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{rl}{2}$ ;

gde je  $\alpha$  centralni ugao iskazan u stepenima, koji odgovara luku  $l$ , odnosno kružnom isečku.

PRIZMA: baza (osnova)  $B$  mnogougao; strana  $S$  paralelogram; omotač  $M$  sastavljen od strana; ivice (bočne stranice) paralelne i jednake; visina  $H$ ;

*površina i zapremina*  $P = 2B + M, \quad V = BH$ .

PRAVA PRIZMA: ivice normalne na bazu; strana  $S$  pravougaonik.

PRAVILNA PRIZMA: prava prizma, baza pravilni mnogougao.

PARALELOPIPED: baza paralelogram.

KVADAR: prav paraleloiped, baza pravougaonik.

PIRAMIDA: baza (osnova)  $B$  mnogougao; strana  $S$  trougao; omotač  $M$  sastavljen od strana; teme; visina  $H$ ;

$$\text{površina i zapremina } P = B + M, \quad V = \frac{BH}{3}.$$

PRAVA PIRAMIDA: ivice (bočne stranice) jednake; strana  $S$  jednakokraki trougao.

PRAVILNA PIRAMIDA: prava piramida, baza pravilni mnogougao.

TETRAEDAR: piramida sa tri strane.

ZARUBLJENA PIRAMIDA: nastaje iz piramide (osnovna piramida) odstranjivanjem njenog vrha (dopunska piramida) pomoću ravni paralelne sa bazom; baze  $B_1$ ,  $B_2$ , strana  $S$  trapez; omotač  $M$  sastavljen od strana; visina  $H$ ;

$$\text{površina i zapremina } P = B_1 + B_2 + M, \quad V = \frac{(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)H}{3}.$$

VALJAK (CILINDAR): baza (osnova)  $B$  krug; omotač  $M$ ; izvodnice paralelne i jednake; osa spaja centre baza; poluprečnik baze  $R$ ; visina  $H$ ;

$$\text{površina i zapremina } P = 2B + M = 2R^2\pi + M, \quad V = BH = R^2\pi H.$$

PRAV VALJAK: osa normalna na bazu;

$$\text{omotač i površina } M = 2R\pi H, \quad P = 2R\pi(R + H).$$

KUPA (KONUS): baza (osnova)  $B$  krug; omotač  $M$ ; izvodnica  $s$ ; teme; osa spaja teme i centar baze; poluprečnik baze  $R$ ; visina  $H$ ;

$$\text{površina i zapremina } P = B + M = R^2\pi + M, \quad V = \frac{BH}{3} = \frac{R^2\pi H}{3}.$$

PRAVA KUPA: osa normalna na bazu;

$$\text{omotač i površina } M = R\pi s, \quad P = R\pi(R + s).$$

ZARUBLJENA KUPA: nastaje iz kupe (osnovna kupa) odstranjivanjem njenog vrha (dopunska kupa) pomoću ravni paralelne sa bazom; baze  $B_1$ ,  $B_2$ ; omotač  $M$ ; izvodnica  $s$ ; osa spaja centre baza; poluprečnici baza  $R$ ,  $r$ ; visina  $H$ ;

$$\text{površina i zapremina } P = B_1 + B_2 + M, \quad V = \frac{(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)H}{3}.$$

SFERA (LOPTA): poluprečnik  $R$ ;

$$\text{površina i zapremina sfere } P = 4R^2\pi, \quad V = \frac{4R^3\pi}{3};$$

$$\text{površina odsečka (kalota) } P = 2R\pi H;$$

$$\text{zapremina isečka } V = \frac{2R^2\pi H}{3},$$

gde je  $H \leq R$  visina odsečka, odnosno isečku pripadnog odsečka.

Zbog podrazumevanog razumevanja od strane čitalaca, a radi jednostavnosti zapisivanja, u zadacima iz ove oblasti su učinjene izvesne nekorektnosti. Na primer, duž  $AB$  i njena dužina (veličina duži)  $AB = 2$  su isto označene, pri čemu merna jedinica (mm, cm, itd.) nije upisana. Kod površina i zapremina takođe nije upisivana merna jedinica ( $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$ , odnosno  $\text{mm}^3$ ,  $\text{cm}^3$ ). Nekorektnosti ovog tipa su naročito izražene u zadacima iz stereometrije.

**TEKSTOVI**  
**ZADATAKA**



## Test 1

1.1. Izračunati vrednost izraza

$$1\frac{5}{28} \cdot \left(7\frac{5}{7} : 3\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) + 5\frac{5}{6} : \frac{5}{12}.$$

1.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{6x - x^2 - 8} - 3x + 4 = 0.$$

1.3. Rešiti nejednačinu

$$4^x < \frac{16}{2^{\frac{4}{x+1}}}.$$

1.4. Rešiti jednačinu

$$\sin(x+1) - \sin(3x+3) = 4\sin^2(x+1)\cos(x+1).$$

1.5. Izračunati površinu pravouglog trougla kod kojeg je hipotenuza  $c = 2$  i jedan oštar ugao  $\alpha = 22^\circ 30'$ .

1.6. Racionalisati razlomke

$$A = \frac{44}{2 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} \quad \text{i} \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 2}.$$

## Test 2

2.1. Naći vrednost izraza

$$\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2 : 2\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}.$$

2.2. Rešiti jednačinu

$$\log_{100} x^2 + \log_{10}(3x+13) - 1 = 0.$$

2.3. Sastaviti kvadratnu jednačinu sa racionalnim koeficijentima ako se zna da je jedno njeno rešenje

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

**2.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos(x - 1) - \cos(3x - 3) = 4 \sin^3(x - 1).$$

- 2.5.** Osnova prave prizme je romb. Omotač iznosi 48, dijagonala strane 5, a najkraće rastojanje naspramnih strana je jednako visini prizme. Izračunati zapreminu prizme.
- 2.6.** U rudniku je iskopano 2210 tona uglja i utvrđeno je da on sadrži 2% vlage. Na stovarištu se, usled čestih padavina i dugog stajanja, procenat vlage povećao na 15%. Za koliko se povećava ukupna težina iskopanog uglja?

**Test 3****3.1.** Izračunati vrednost izraza

$$5\frac{17}{24} \cdot 3 + 18\frac{3}{5} : 2 + \frac{0.1 - 0.090}{0.6 - 0.58}.$$

**3.2.** Rešiti jednačinu

$$\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = \sqrt{2x + 7}.$$

**3.3.** Rešiti nejednačinu

$$\log_7 \log_{\frac{1}{\sqrt[7]{7}}}(x - 2) < 1.$$

**3.4.** Rešiti jednačinu

$$\sin x - \sin \frac{x}{3} = 0.$$

- 3.5.** Ako su  $a$ ,  $b$  katete i  $c$  hipotenuza pravouglog trougla, dokazati da je  $a + b \leq c\sqrt{2}$ . Kada važi jednakost?
- 3.6.** Naći geometrijsko mesto tačaka u kompleksnoj ravni za koje je:
- a)  $|z - i| = |z + 2|$ ;
- b)  $1 < |z + 2 - 3i| < 2$ .

### Test 4

4.1. Naći vrednost izraza

$$\frac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{15}\right) \cdot 30}{1\frac{1}{3}} - \frac{4.25 : 0.85 + 1 : 0.5}{(5.56 - 4.06) : 3}.$$

4.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+1} \sqrt{2x-5} - x - 3 = 0.$$

4.3. Rešiti nejednačinu

$$5^{-x} < 25^{-\frac{1}{x+1}}.$$

4.4. Naći:

- a)  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  i  $\cot \alpha$  ako je  $\cos \alpha = -1/6$  i  $\sin \alpha < \cos \alpha$ ;
- b)  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  i  $\tan \alpha$  ako je  $\cot \alpha = -8/13$  i  $\sin \alpha > \cos \alpha$ ;
- c)  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  i  $\cot \alpha$  ako je  $\tan \alpha = \sqrt{2}$  i  $\alpha \in (0, \pi)$ ;
- d)  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  i  $\cot \alpha$  ako je  $\sin \alpha = 5/13$  i  $\alpha \in [\pi/4, \pi]$ .

4.5. Osnova pravog paralelopipeda je paralelogram sa stranicama  $a = 3$ ,  $b = 8$  i zahvaćenim uglom  $\gamma = 30^\circ$ . Ako je omotač  $M = 220$ , izračunati površinu i zapreminu paralelopipeda.

4.6. Zlatar treba da pomeša srebro finoće 600 ‰ i srebro finoće 900 ‰ da bi dobio 600 grama srebra finoće 850 ‰. Koliko treba da uzme srebra finoće 600 ‰, a koliko srebra finoće 900 ‰?

### Test 5

5.1. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{(1.09 - 0.29) \cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18.9 - 16\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}} + \frac{(11.81 + 8.19) \cdot 0.02}{9 : 11.25}.$$

5.2. Rešiti jednačinu

$$\log_{2^{-1}}(x-1) + \log_{0.5}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1.$$

**5.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2 - 2x + 9} - x \leq 2 + |2x - 7|.$$

**5.4.** Rešiti jednačinu

$$\sin x - \sin \frac{5x}{8} \cos \frac{3x}{8} = 0.$$

**5.5.** U trouglu  $ABC$  je stranica  $AB = 3$ , visina  $CD = \sqrt{3}$  i  $AD = BC$ . Kolika je stranica  $AC$ ?

**5.6.** Od ukupnog broja upisanih učenika na početku godine, bilo je 46% devojčica. U toku godine školu je napustilo 15 devojčica i 30 dečaka, pa je na kraju od ukupnog broja preostalih učenika 48% bilo devojčica. Koliko je učenika upisano na početku, a koliko ih je ostalo na kraju školske godine?

## Test 6

**6.1.** Izračunati vrednost izraza

$$\frac{(82.15 - 5.7) \cdot 0.05}{2.23 - 1\frac{49}{50}} + \left(0.81 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(0.81 - \frac{1}{2}\right).$$

**6.2.** Rešiti jednačinu

$$\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4 \log_x 4).$$

**6.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{x}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{3x + 2}.$$

**6.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos 9x + \cos 5x + 2 \sin^2 x - 1 = 0.$$

**6.5.** Ivica pravilne trostrane prizme je 2, a zapremina  $2\sqrt{3}/3$ . Naći poluprečnik sfere opisane oko prizme.

**6.6.** Petar i Kosta su zaradili izvesnu količinu novca i nameravali da ga podele u odnosu 3 : 5. Greškom je suma podeljena u odnosu 3 : 2 i tako je Petar dobio 360 dinara više nego što mu pripada. Izračunati ukupnu sumu



novca, kako treba pravilno podeliti novac i koliko je procenata ukupne sume novca dobio Petar više nego što mu pripada.

## Test 7

7.1. Naći vrednost izraza

$$\frac{\left(2.4 + 1\frac{1}{2}\right) \cdot 2.5 + \left(6\frac{1}{12} : 6 - 1\frac{1}{72}\right) : \left(8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21}\right)}{54.75 - 4.5 : 0.1}$$

7.2. Rešiti jednačinu

$$2\sqrt{1 - \frac{2}{1-x}} - \frac{1}{1-x} = 0.$$

7.3. Rešiti nejednačinu

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} > \sqrt[3]{27^{2x+17}}.$$

7.4. Naći  $\tan \alpha$  ako je  $\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$  i  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

7.5. U krugu poluprečnika  $r = 25$  povučene su dve paralelne tetive  $t_1 = 14$  i  $t_2 = 48$ . Koliko je njihovo rastojanje?

7.6. Na pismenoj vežbi su učenicima zadata tri zadatka. Pri tome, 12% učenika nije rešilo nijedan zadatak, 32% je rešilo jedan ili dva zadatka, a 14 učenika je rešilo sva tri zadatka. Koliko je ukupno učenika radilo ovu pismenu vežbu?

## Test 8

8.1. Naći vrednost izraza

$$\frac{0.8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1.25\right)}{0.64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1.08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} + 1.2 \cdot 0.5 : \frac{4}{5}.$$

8.2. Sastaviti kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima ako se zna da je jedno njeno rešenje

$$x_1 = \frac{1}{2 + i\sqrt{5}}.$$

**8.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{\log_4(x-3)} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{64}{x-3}.$$

**8.4.** Naći  $\cot \alpha$  ako je  $3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 5 - 8 \sin \alpha \cos \alpha$ .

**8.5.** Osnova piramide je trougao sa stranicama  $a = 9$ ,  $b = 8$ ,  $c = 7$ , a ugao između osnove i ivica je  $\alpha = 60^\circ$ . Izračunati zapreminu piramide.

**8.6.** Naći koliko ima racionalnih sabiraka u binomnom razvoju izraza

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{20}.$$

## Test 9

**9.1.** Naći vrednost izraza

$$\left( \frac{\left(11 - 9\frac{1}{2}\right) : 0.003}{\left(4.05 - 3\frac{13}{20}\right) \cdot 20} - \frac{0.45 - \frac{9}{40}}{13\frac{5}{8} : \left(2\frac{3}{5} + \frac{1}{8}\right)} \right) : 62\frac{91}{200}.$$

**9.2.** Rešiti jednačinu

$$49^{x+2} + 6 \cdot 7^{x+1} - 6^{-\log_6 7} = 0.$$

**9.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{3x}{x^2 - 1} \geq \frac{10}{5x + 1}.$$

**9.4.** Dokazati da je

$$\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha.$$

**9.5.** Hipotenuza pravouglog trougla je  $c = 40$ . Iz središta hipotenuze se povlači normala  $n = 15$  na hipotenuzu do preseka sa dužom katetom. Odrediti obim i površinu trougla.

**9.6.** Odrediti koliko ima racionalnih sabiraka u binomnom razvoju izraza

$$\left(\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2}\right)^{100}.$$

### Test 10

10.1. Izračunati vrednost izraza

$$\left( \frac{\left(1\frac{1}{4} : 3\frac{7}{12}\right) \cdot 5\frac{1}{60}}{5.225 - \frac{5}{9} - 3\frac{5}{6}} - \frac{3\frac{13}{15} : \frac{42}{45} + \left(6\frac{53}{56} - 2.375\right)}{2.25 + 0.25 \cdot 8\frac{3}{7}} \right) \cdot 4.3.$$

10.2. Rešiti jednačinu

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{3x-4} + \sqrt{x} = 0.$$

10.3. Ako je

$$\log_4 11 = a \quad \text{i} \quad \log_4 13 = b,$$

naći

$$(\log_{11} 13 + \log_{13} 11)^{-1} + \log_{289} 17.$$

10.4. Rešiti jednačinu

$$\sin x - \sin \frac{x}{5} + 1 = 2 \cos^2 \frac{3x}{10}.$$

10.5. Osnova prave piramide je pravougaonik sa stranicama  $a = 12$ ,  $b = 9$ , a ivica piramide je  $s = 25/2$ . Odrediti zapreminu piramide.

10.6. Dokazati da je

$$\frac{\sqrt[4]{0.98} - \sqrt[4]{0.02}}{\sqrt[4]{0.98} + \sqrt[4]{0.02}} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}.$$

### Test 11

11.1. Naći  $x$  iz jednakosti

$$\left(1.7 : \left(1\frac{2}{3} \cdot x - 3.75\right)\right) : \frac{8}{25} = 1\frac{5}{12}.$$

11.2. Rešiti jednačinu

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3.$$

11.3. Rešiti nejednačinu

$$2^{\frac{2x-1}{2}} + 2^{\frac{2x-5}{2}} > 25^{\frac{2x-7}{2}} - 5^{2x-8}.$$

11.4. Rešiti jednačinu

$$\sin x - \sin \frac{7x}{3} + \sin \frac{4x}{3} = 0.$$

11.5. Katete pravouglog trougla su  $a = 15$  i  $b = 20$ . U njega je upisan krug, a u krug je upisan novi trougao, sličan prethodnom. Koliki su obim i površina manjeg, upisanog trougla?

11.6. Zupčanik ima 54 zupca i izvrši 84 obrtaja u minutu. Koliko zubaca ima drugi zupčanik, koji radi u prenosu sa prvim i izvršava 126 obrtaja u minutu?

## Test 12

12.1. Izračunati vrednost izraza

$$3\frac{1}{4} - \left( \frac{6 : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} + 5\frac{2}{11}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{15}\right) \cdot \frac{12}{49}}{3\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} \right) \cdot 2\frac{1}{3}.$$

12.2. Rešiti jednačinu

$$6 \cdot \frac{2^{x-2}}{2^{x+1} - 3^{x+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = 1.$$

12.3. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2 + 8} + 2x \leq 2 + 3|x|.$$

12.4. Rešiti jednačinu

$$\sin 5x - \sin 3x + \sin 2x = 0.$$

12.5. Visina pravilne trostrane piramide je  $H = 3$ , a zapremina  $V = 2\sqrt{3}/3$ . Naći poluprečnik sfere opisane oko piramide.

12.6. Naći koliko ima racionalnih sabiraka u binomnom razvoju od

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{50}.$$

### Test 13

13.1. Odrediti vrednost izraza

$$\left( \frac{928 \cdot \frac{1}{100}}{0.8} - 0.6 \right) \cdot \left( \frac{\left( 42 \cdot 3 \frac{5}{6} - 3.3 : 0.03 \right) : \frac{1}{15}}{\left( 3 \frac{3}{4} : 0.625 - 0.84 : 0.8 \right) : 0.03} \right).$$

13.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{1 - \frac{4}{4-x}} = \frac{1}{4-x}.$$

13.3. Rešiti nejednačinu

$$\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4.$$

13.4. Rešiti jednačinu

$$\frac{\cos x}{\cos \frac{x}{3}} + 4 \sin \frac{x}{3} + 1 = 0.$$

13.5. Katete pravouglog trougla  $ABC$  su  $a = BC = 3$ ,  $b = AC = 4$ . Naći rastojanje između temena  $C$  i centra upisane kružnice.

13.6. Naći koliko ima racionalnih sabiraka u binomnom razvoju od

$$\left( \sqrt[3]{12} + \sqrt[6]{3} \right)^{30}.$$

### Test 14

14.1. Izračunati vrednost izraza

$$\left( 41 \frac{23}{84} - 40 \frac{49}{60} \right) \cdot \left( \left( 4 - 3 \frac{1}{2} \cdot \left( 2 \frac{1}{7} - 1 \frac{1}{5} \right) \right) : 0.16 \right).$$

14.2. Rešiti jednačinu

$$64^{\frac{1}{x-1}} + 4 \cdot 2^{\frac{3}{x-1}-1} - 24 = 0.$$

14.3. Rešiti nejednačinu

$$|x^2 - 4| - x + 1 \geq 0.$$

14.4. Naći  $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$  ako je  $\sin \alpha = 3/5$ ,  $\sin \beta = 12/13$ ,  $\sin \gamma = 7/25$  i  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$ .

**14.5.** Ugao između osnove i strane pravilne trostrane piramide je  $\alpha = 60^\circ$ , a najkraće rastojanje težišta osnove od strane je  $d = 3$ . Izračunati zapreminu piramide.

**14.6.** Dokazati da je broj

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

iracionalan.

### Test 15

**15.1.** Naći vrednost izraza

$$\frac{\left( \left( 40\frac{7}{30} - 38\frac{5}{12} \right) : 10.9 + \left( \frac{7}{8} - \frac{7}{30} \right) \cdot 1\frac{9}{11} \right) \cdot 4.2}{0.008}.$$

**15.2.** Data je jednačina

$$x^2 - 2(2 + m)x + 12 + m^2 = 0.$$

a) Naći uslove za parametar  $m \in \mathbb{R}$  za koja su rešenja jednačine realna. Naći sumu rešenja.

b) Naći uslov za parametar  $m \in \mathbb{R}$  da rešenja budu dvostruka.

**15.3.** Rešiti nejednačinu

$$\left| \frac{2x - 7}{x - 3} \right| < 3.$$

**15.4.** Naći  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  i  $\cot \alpha$ , ako je  $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$ .

**15.5.** U krug poznatog poluprečnika  $R$  upisana su tri kruga jednakih poluprečnika, koji se međusobno dodiruju. Odrediti površinu upisanog kruga.

**15.6.** U jednoj školi ima ukupno 760 učenika i nastavnika. Dečaka ima 8 puta više nego nastavnika, a broj devojčica odnosi se prema broju dečaka kao  $5 : 4$ . Koliko je procenata dečaka, devojčica i nastavnika od ukupnog broja osoba u školi?

### Test 16

16.1. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{\left(2.4 + 1\frac{1}{2}\right) \cdot 2.5 + \left(6\frac{1}{12} : 6 - 1\frac{1}{72}\right) : \left(8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21}\right)}{0.4 \cdot (54.75 - 4.5 : 0.1) \cdot \left(3\frac{1}{2} + 0.666\dots\right) \cdot \frac{3}{5}}.$$

16.2. Rešiti jednačinu

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}.$$

16.3. Rešiti nejednačinu

$$3^{\frac{2x+1}{2}} - 3^{\frac{2x-3}{2}} \leq 2^{2x-1} + 4^x.$$

16.4. Naći  $\cos(\alpha - \beta)$  ako je  $\sin \alpha + \sin \beta = 1$  i  $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{2}$ .

16.5. Stranice baza pravilne trostrane zarubljene piramide su  $a = 6$ ,  $b = 2$ . Ugao između strane i veće baze je  $\alpha = 60^\circ$ . Izračunati zapreminu zarubljene piramide.

16.6. Rešiti jednačinu

$$(z + i)^4 = (z - i)^4,$$

gde je  $z = x + iy$  kompleksan broj.

### Test 17

17.1. Izračunati vrednost izraza

$$\left(4.25 - \frac{\left(4\frac{9}{16} - \left(2\frac{1}{3} - 0.333\dots\right)\right) \cdot \frac{18}{41}}{0.45}\right) : 1.4 + 0.08333\dots$$

17.2. Rešiti jednačinu

$$2^{5x+1} - 32^{x-1} + 5 \cdot 64^{\frac{5x+1}{6}} = 383.$$

**17.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2 - 2x + |x| + 1} + x > 0.$$

**17.4.** Naći  $\tan \alpha$  i  $\tan \beta$  ako je  $\tan \alpha + \tan \beta = 2$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = 4$  i  $\tan \alpha < \tan \beta$ .

**17.5.** Krug poluprečnika  $r$  se iz tačke  $M$  vidi pod pravim uglom. Odrediti površinu dela ravni unutar tog ugla, a van kruga.

**17.6.** Nekoliko minuta posle 12 časova Nemanja je počeo da radi domaći zadatak i u tom trenutku je pogledao na sat. Kada je završio, ponovo je pogledao na sat i utvrdio da su kazaljke međusobno zamenile mesta. Kada je Nemanja počeo, a kada završio izradu domaćeg zadatka?

## Test 18

**18.1.** Naći vrednost izraza

$$\frac{3 : \frac{2}{5} - 0.09 : \left(0.15 : 2\frac{1}{2}\right)}{0.32 \cdot 6 + 0.03 - (5.3 - 3.88) + 0.67}.$$

**18.2.** Rešiti jednačinu

$$4^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}.$$

**18.3.** Rešiti nejednačinu

$$\log_{10}(5^x + x - 20) > x - x \log_{10} 2.$$

**18.4.** Ako su  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  uglovi trougla i ako je

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sqrt{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma),$$

tada je bar jedan od ovih uglova jednak  $\pi/3$ . Dokazati.

**18.5.** Ugao između ose i osnove valjka je  $\alpha = 60^\circ$ , a jedan njegov osni presek je romb poznate stranice  $a$ . Kolika je zapremina valjka?

**18.6.** Rešiti jednačinu

$$x = 1 - 5(1 - 5x^2)^2.$$



### Test 19

19.1. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{\left(84.63 : 2.1 - \frac{7}{8} \cdot 35.2 + 2\frac{5}{42} - 7\frac{43}{48}\right) : 7\frac{25}{56}}{\left(14\frac{1}{6} - 3.2 : 4\right) : \left(17.25 : 2.3 + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{229}{802}}.$$

19.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3x-8} - \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = 0.$$

19.3. Rešiti nejednačinu

$$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1) \leq 2.$$

19.4. Ako su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  uglovi trougla, dokazati jednakost

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

19.5. Hipotenuza pravouglog trougla  $ABC$  je  $c = AB = 4$ , a ugao kod temena  $A$  je  $\alpha = 30^\circ$ . Kružnica sa centrom u temenu  $A$  deli trougao na dva dela jednakih površina. Naći poluprečnik te kružnice.

19.6. Rešiti jednačinu

$$z^3 - \bar{z} = 0 \quad (z = x + iy).$$

### Test 20

20.1. Naći  $x$  iz jednačine

$$\left(16\frac{1}{2} - 13\frac{7}{9}\right) \cdot x + 2.2 \cdot (0.242424\dots - 0.090909\dots) = \frac{20}{11}.$$

20.2. Data je kvadratna jednačina

$$x^2 + (m-1)x + 3 + m - 4m^2 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

a) Odrediti parametar  $m$  tako da jednačina ima realna rešenja.

b) Ako su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine, naći vrednost zbira

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

**20.3.** Rešiti nejednačinu

$$\left( \left( \frac{3}{7} \right)^{x^2 - 2x} \right)^{1/x^2} \geq 1.$$

**20.4.** Rešiti jednačinu

$$\frac{1}{\sin x} - 5 \cos 3x - 5 \cos x = 0.$$

**20.5.** Visina i poluprečnik osnove pravog valjka su  $H = 25$ ,  $R = 15$ . Iz valjka je odstranjen drugi valjak koji ima istu osu i visinu  $H$ , a poluprečnik osnove mu je  $r = 6$ . Izračunati površinu tako dobijenog "šupljeg valjka".

**20.6.** Naći vrednost izraza

$$\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{7}}.$$

## Test 21

**21.1.** Odrediti  $x$  iz jednačine

$$\frac{\left( \left( 4.625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} \right) : x + (2.5 : 1.25) : 6.75 \right) : 1 \frac{53}{68}}{\left( \frac{1}{2} - 0.375 \right) : 0.125 + \left( \frac{5}{6} - \frac{7}{12} \right) : (0.358 - 1.4796 : 13.7)} = \frac{17}{27}.$$

**21.2.** Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x (0.125)^{1/x}}} = 4 \sqrt[3]{2}.$$

**21.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} - 3 \geq 0.$$

**21.4.** Rešiti jednačinu

$$\sin 9x - \sqrt{3} \cos 7x - \sin 5x = 0.$$

- 21.5.** Nad stranicom  $a = AB = 2\sqrt{6}$  jednakostraničnog trougla  $ABC$  kao prečnikom konstruisan je krug. Izračunati površine delova trougla, koji su unutar i van kruga.
- 21.6.** Ako Ana uloži u banku 25000 dinara na godinu dana dobiće kamatu od  $p\%$ . Na sav novac koji uloži preko 25000 dinara dobija  $(p + 2)\%$  kamate. Koliko novca je Ana uložila u banku ako je ukupna kamata za godinu dana bila  $(p + 0.4)\%$ ?

## Test 22

- 22.1.** Izračunati  $x$  iz jednačine

$$\left( 0.444\dots + 3.4 \cdot \frac{(4.1333\dots + 0.8 \cdot x) \cdot \frac{3}{136}}{1.7} \right) : 0.58 - 0.5 = \frac{11}{18}.$$

- 22.2.** Rešiti jednačinu

$$\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}-3} - \frac{\sqrt{x+1}+1}{3} - 4 = 0.$$

- 22.3.** Rešiti nejednačinu

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\log_{4-1}(x^2-7x+10)} < 2.25.$$

- 22.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos x + \sqrt{3} \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

- 22.5.** U prav valjak je upisana pravilna trostrana prizma, a u nju je upisan novi prav valjak. Odrediti odnos zapremine ovih valjkova.

- 22.6.** Rešiti jednačinu

$$z^2 - \bar{z} = 0 \quad (z = x + iy).$$

**Test 23****23.1.** Naći vrednost izraza

$$\left( \frac{1.5 : 0.3}{0.6 \cdot 5 : \frac{3}{5}} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{30}{77}}{\left(2\frac{3}{25} + \frac{22}{7}\right) \cdot 25} \right) : \frac{1}{3} + \frac{1}{307}.$$

**23.2.** Rešiti jednačinu

$$\log_2 x + \log_3 \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{x} + \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}}.$$

**23.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} > \frac{3}{2}.$$

**23.4.** Rešiti jednačinu

$$2 \left( \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x \right) = \sqrt{2} - 1.$$

**23.5.** Izračunati površinu paralelograma sa stranicama  $a = 9$ ,  $b = 6$  i tupim uglom  $\beta = 150^\circ$ .**23.6.** Dokazati da za svako  $z = x + iy$ , sa osobinom  $|z| \leq 1$ , važi nejednakost

$$|3 + 2i - z| \geq \sqrt{13} - 1.$$

**Test 24****24.1.** Odrediti vrednost izraza

$$1.7 : \frac{(4.5 \cdot 1.666\dots + 3.75) \cdot \frac{296}{4995}}{\frac{5}{9}} - 0.41666\dots$$

**24.2.** U zavisnosti od realnog parametra  $k$  rešiti jednačinu

$$x^2 - (8k - 2)x + (15k^2 - 2k - 7) = 0.$$

**24.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \geq \sqrt{5-2x}.$$

**24.4.** Uprostiti izraz

$$\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}.$$

**24.5.** Ugao između izvodnice i visine prave kupe je  $\alpha = 60^\circ$ , a njihova razlika je 5. Izračunati površinu i zapreminu kupe.

**24.6.** Dva radnika mogu da završe posao za 12 dana. Posle zajedničkog rada od 5 dana jedan radnik se razboli, pa je drugi sam produžio sa radom i završio posao za narednih 17.5 dana. Za koliko dana može da završi taj posao svaki radnik radeći sam?

## Test 25

**25.1.** Odrediti  $x$  iz jednačine

$$\frac{x : 9}{10.5 \cdot 0.24 - 14.15 : 7.5} = \frac{1\frac{11}{20} - 0.945 : 0.9}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : 7}.$$

**25.2.** Rešiti jednačinu

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

**25.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{\frac{7}{2}x - x^2 - \frac{3}{2}}{\log_2 |x - 1|} > 0.$$

**25.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos \frac{x}{3} - \cos x - 4 \sin^3 \frac{x}{3} = 0.$$

**25.5.** Stranica romba je geometrijska sredina njegovih dijagonala. Koliki su uglovi romba?

**25.6.** Izračunati vrednost izraza

$$\frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

### Test 26

26.1. Naći vrednost izraza

$$\frac{9 \cdot 3.333\dots + 19.5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0.16} : \frac{3.5 + 2\frac{2}{15} + 4.666\dots}{0.5 \cdot \left(1\frac{1}{20} + 4.1\right)}.$$

26.2. Rešiti jednačinu

$$|\log(x-1) + \log(4-x) - \log x| = |\log x - \log 2|.$$

26.3. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2 - x.$$

26.4. Rešiti jednačinu

$$\sin \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{3} - \cos 2x = 0.$$

26.5. Osnova prave kupe je  $B = 7\pi$ . Njen omotač  $M$  u razvijenom obliku je osmina odgovarajućeg kruga. Izračunati površinu i zapreminu kupe.

26.6. Za koje celobrojne vrednosti  $k$  su koreni kvadratne jednačine

$$kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$$

racionalni?

### Test 27

27.1. Naći vrednost izraza

$$\frac{\left(0.1 + \frac{1}{15} + 0.1666\dots\right) : \left(\frac{1}{6} + 0.1 - 0.0666\dots\right) \cdot 2.52}{\left(0.5 - \frac{1}{5} + 0.25 - 0.333\dots\right) : \left(0.25 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{7}{13}}.$$

27.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} = 1.$$

**27.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{1}{2} \log_{7^{-\frac{1}{2}}} x - 2 \log_{7^2} (x + 6) + 2 \geq 0.$$

**27.4.** Dokazati da za svako  $x \in (\pi/4, \pi/2)$  važi identitet

$$\frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sin^2 x - \cos^2 x} + \frac{\sin 2x \cos x}{\sin x \cos x + \cos^2 x} = \sin x + \cos x.$$

**27.5.** Zbir dijagonala romba je 8, a površina romba je 7. Koliki je obim romba?

**27.6.** Racionalisati razlomak

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}}.$$

## Test 28

**28.1.** Naći vrednost izraza

$$\frac{1}{4^{-1}} \cdot \left( \left( \frac{1}{0.25} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( -\frac{1}{0.5} \right)^3 \left( -\frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{0.8} \right)^2 \right) : \left( 2 - \frac{1}{2} \right)^2.$$

**28.2.** U zavisnosti od realnog parametra  $m$  rešiti jednačinu

$$4x^2 + (m - 2)x + m - 5 = 0.$$

**28.3.** Rešiti nejednačinu

$$0.3^{2x^2 - 3x + 6} < 0.00243.$$

**28.4.** Ako za neko  $\alpha \in (0, \pi/4)$  važi  $\sin \alpha \cos \alpha = 2/5$ , izračunati:

a)  $\sin \alpha + \cos \alpha$ ;

b)  $\sin \alpha - \cos \alpha$ ;

c)  $\sin^{2m} \alpha + \cos^{2m} \alpha$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**28.5.** Oko prave kupe, čija je visina jednaka prečniku baze, opisana je lopta poluprečnika 8. Odrediti površinu i zapreminu kupe.

**28.6.** Učenik je krenuo u školu između 8 i 9 sati ujutru i to u trenutku kada su se mala i velika kazaljka poklopile. Vratio se kući između 2 i 3 sata popodne, u trenutku kada su kazaljke gradile opružen ugao. Koliko je vremena proteklo od polaska do povratka iz škole?

### Test 29

**29.1.** Izračunati vrednost izraza

$$\frac{3\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{80}} - \left(\frac{5}{4} \cdot \sqrt{0.8} - 5 \cdot \sqrt{0.2} - \sqrt{20}\right) - 10 \cdot \sqrt{0.2}}{3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} - \left(\sqrt{4\frac{1}{2}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}\right) + 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{9}} - 140 \cdot \sqrt{0.02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$

**29.2.** Za koje vrednosti realnog parametra  $m$  jednačina

$$\log_4(3+x) - \log_{0.25}(1-x) = 1 + \log_4 \log_2 m$$

može imati realna rešenja? Za koje celobrojne vrednosti parametra  $m$  data jednačina ima realna rešenja?

**29.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{3x}{x^2 - 9} \leq \frac{1}{x + 2}.$$

**29.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos 2x + \cos 6x = -\sqrt{3} \cos 4x.$$

**29.5.** Zbir dijagonala romba je 14, a manja dijagonala iznosi  $3/4$  veće. Izračunati stranicu romba i poluprečnik upisane kružnice.

**29.6.** Da li je vrednost izraza

$$2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2}$$

racionalan ili iracionalan broj?

### Test 30

**30.1.** Naći vrednost izraza

$$3\frac{5}{14} - \left(1\frac{11}{49} : \left(76 \cdot \frac{25}{38} - 47\frac{3}{7}\right)\right) \cdot \frac{12}{55}.$$

**30.2.** Za koju vrednost parametra  $k > 0$  je jedan koren jednačine

$$8x^2 - 6x + 9k^2 = 0$$



jednak kvadratu drugog korena?

**30.3.** Rešiti nejednačinu

$$\left| \frac{3x + 7}{x + 2} \right| \leq 5.$$

**30.4.** Rešiti jednačinu

$$\tan x + \cot x = 3 + 2 \sin 2x.$$

**30.5.** Izvodnica i poluprečnik osnove prave kupe su  $s = 5$ ,  $R = 3$ . Kupa je izdubljena pomoću pravog valjka, čija se osa poklapa sa osom kupe, a osnova mu je deo osnove kupe. Poluprečnik osnove valjka je  $r = 1$ , a visina  $h$  je jednaka polovini visine  $H$  kupe. Izračunati površinu i zapreminu izdubljene kupe.

**30.6.** Dokazati da je

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

prirodan broj.

### Test 31

**31.1.** Odrediti vrednost izraza

$$\frac{\left( 1.75 : \frac{2}{3} - 1.75 \cdot 1\frac{1}{8} \right) : \frac{7}{12}}{\left( \frac{17}{80} - 0.0325 \right) : 400} : (6.79 : 0.7 + 0.3).$$

**31.2.** Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5.$$

**31.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{2}{|x| + 3} - \frac{1}{|x| - 1} < 0.$$

**31.4.** Uprostiti izraz

$$\frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}.$$

**31.5.** Dijagonala jednakokrakog trapeza je dva puta duža od njegove srednje linije  $m$ . Ako je  $m$  poznato, kolika je površina trapeza?

- 31.6.** Cena neke robe je najpre povećana za 20%, a posle mesec dana smanjena za 20%. Posle ove promene prvobitna cena se smanjila za 60 dinara. Za koliko dinara bi se smanjila prvobitna cena ako bi se najpre smanjila za 20%, a zatim povećala za 20%?

### Test 32

- 32.1.** Naći vrednost izraza

$$\left( \left( \left( 6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{14} \right) \cdot 0.56 \right) : 0.75 \right) : 6\frac{2}{3}.$$

- 32.2.** Rešiti jednačinu

$$\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2.$$

- 32.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{|2x - 1|}{x^2 - x - 2} > \frac{1}{2}.$$

- 32.4.** Ako je  $\sin \alpha = 3/5$  i  $\cos \beta = -12/13$ ,  $0 < \alpha, \beta < \pi$ , izračunati vrednost izraza

$$T(\alpha, \beta) = \cos(2\alpha + \beta) + \sin(\beta - 2\alpha).$$

- 32.5.** Prava zarubljena kupa ima poluprečnike baza  $R = 3$ ,  $r = 1$  i visinu  $H = 2$ . Odrediti odnos zapremine zarubljene i dopunske kupe.

- 32.6.** Racionalisati izraz

$$\frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}.$$

### Test 33

- 33.1.** Izračunati

$$6 : \frac{1}{3} - 0.8 : \frac{1.5}{\frac{3}{2} \cdot 0.4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0.25}}{6 - \frac{46}{1 + 2.2 \cdot 10}}.$$

**33.2.** Da li jednačine

$$\sqrt{(3x+8)(x+3)} = 2 \quad \text{i} \quad \sqrt{3x+8}\sqrt{x+3} = 2$$

imaju ista rešenja?

**33.3.** Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2 + 3x + 9} + 2x \leq 3|x + 1|.$$

**33.4.** Rešiti jednačinu

$$\sin x + \cos x = -1.$$

**33.5.** U jednakokrakom trapezu sa osnovicama  $a = 8$  i  $b = 6$  dijagonale se seku pod pravim uglom. Izračunati obim i površinu trapeza.

**33.6.** Dokazati da je vrednost izraza

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

prirodan broj.

## Test 34

**34.1.** Izračunati

$$\left( \left( \left( 3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} \right) : 2^{-\frac{5}{4}} \right) : \left( 16 : \left( 5^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right)^{\frac{1}{5}}.$$

**34.2.** Rešiti jednačinu

$$5^x + 12^x = 13^x.$$

**34.3.** Rešiti nejednačinu

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

**34.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos 2x - \cos x - \sin x = 0.$$

**34.5.** Pravilna četverostrana prizma ima visinu  $H = 2$  i stranicu osnove  $a = 4$ . Poluprečnik sfere je jednak rastojanju između najudaljenijih temena naspramnih strana prizme. Kolike su površina i zapremina sfere?

- 34.6.** Od ulaska lokomotive do poslednjeg vagona u tunel proteklo je 15 sekundi. Od tog trenutka do izlaska poslednjeg vagona iz tunela proteklo je pola minuta. Kolika je dužina voza i kojom brzinom se voz kretao ako je dužina tunela 300 m?

### Test 35

- 35.1.** Naći vrednost izraza

$$\left( 6.2 + 3\frac{9}{16} : \left( \frac{2.75}{14 : \frac{2}{7} - 2.5 : \frac{1}{18}} - \frac{7}{24} \right) \right) : 12.666\dots$$

- 35.2.** Da li jednačine

$$\log_2 x(x+1) = 1 \quad \text{i} \quad \log_2 x + \log_2(x+1) = 1$$

imaju ista rešenja?

- 35.3.** Rešiti nejednačinu

$$\frac{1}{5-x} + \frac{2}{1+x} < 1.$$

- 35.4.** Rešiti jednačinu

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x.$$

- 35.5.** U nejednakokrakom trapezu jedan krak je duži od drugog za 4. Veći krak je kraći od veće osnovice za 2. Zbir manje osnovice i krakova je 40. Jedna dijagonala polovi ugao na većoj osnovici. Odrediti stranice trapeza.

- 35.6.** Odrediti vrednost celobrojnog parametra  $m$  u kvadratnoj jednačini

$$x^2 - mx + 2m - 7 = 0,$$

tako da koreni jednačine zadovoljavaju uslov

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{4}{5} = x_1 + x_2,$$

a zatim za tako nađeno  $m$ , ne rešavajući jednačinu, odrediti zbir kubova njenih korena.

### Test 36

36.1. Izračunati

$$1\frac{9}{20} - \frac{\left(0.645 : 0.3 - 1\frac{107}{180}\right) \cdot \left(4 : 6.25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \cdot 1.96\right)}{1 - 2\frac{1}{5} : 7}.$$

36.2. U skupu realnih brojeva naći rešenje jednačine

$$\log_2 \left( xy + \frac{1}{xy} \right) = 1 - (x + y - 2)^2.$$

36.3. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x.$$

36.4. Rešiti jednačinu

$$\cos 7x + \cos 5x - \sin 2x = 0.$$

36.5. Iz sfere poluprečnika  $R = 5$  je odstranjen isečak, čija pripadna kalota ima visinu  $H = 1$ . Izračunati površinu i zapreminu tako dobijene "izdubljene sfere".

36.6. Pešak je prešao put za četiri dana. Prvog dana je prešao  $1/3$  puta, drugog dana  $1/5$  puta, a trećeg dana 6.8 km. Za ta tri dana je prešao 6 puta više nego što mu je preostalo. Kolika je dužina puta? Koliko procenata puta je pešak prelazio svakoga dana?

### Test 37

37.1. Naći vrednost izraza

$$3.5 + 1.5 \cdot \left( 2.652 : \sqrt{1.69} - 1\frac{17}{30} + \frac{3}{50} \right) \cdot \left( 19.21 - \left( 4.26 - \frac{5}{24} : \frac{5}{42} \right) \right).$$

37.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1} = 0.$$

**37.3.** Rešiti nejednačinu

$$\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2.$$

**37.4.** Izračunati:

a)  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7};$

b)  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}.$

**37.5.** Iz kvadrata zadate stranice  $a$  su odstranjeni ugaoni delovi tako da je preostala figura pravilni osmougao. Kolika je površina tog osmougla?

**37.6.** Ako je  $z = x + iy$ , rešiti jednačinu

$$|z| + z = 2 + i.$$

### Test 38

**38.1.** Izračunati vrednost izraza

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}} \right) \cdot \left( 7^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot 7^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \cdot \sqrt{0.2}.$$

**38.2.** Rešiti jednačinu

$$|x^2 - 2x - 3| = |x^2 - 2x + 5|.$$

**38.3.** Rešiti nejednačinu

$$25^x < 6 \cdot 5^x - 5.$$

**38.4.** Uprostiti izraz

$$A = \frac{\sin^3(270^\circ - \alpha) \cos(\alpha - 360^\circ)}{\tan^3(90^\circ - \alpha) \cos^3(270^\circ - \alpha)}.$$

**38.5.** Romb sa većom dijagonalom  $d = 4$  i ostrim uglom  $\alpha = 60^\circ$  rotira oko jedne svoje stranice. Odrediti površinu i zapreminu tako dobijenog obrtnog tela.

**38.6.** Brojna vrednost izraza

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

je ceo broj. Naći taj broj.

### Test 39

39.1. Naći vrednost izraza

$$\left( \frac{3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} - 6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0.5} : \left( 13\frac{8}{11} - 8\frac{50}{99} \right) \right) \cdot \left( 2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8} \right).$$

39.2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

39.3. Rešiti nejednačinu

$$\log_{1/3} \frac{1}{27x} > 5\sqrt{\log_3 x}.$$

39.4. Rešiti jednačinu

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

39.5. Rastojanje između paralelnih stranica pravilnog šestougla je  $d = 2\sqrt{3}$ . Izračunati obim i površinu šestougla.

39.6. Prvi traktor može izorati neko polje za 15 sati, a drugi za 20 sati. Nakon jednog sata oranja prvim traktorom, u pomoć je došao drugi traktor i zajedno su porali celo polje. Koliko su sati ovi traktori orali zajedno?

### Test 40

40.1. Izračunati vrednost izraza

$$(-10)^2 \cdot \frac{\left( 6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} - 10^2 \cdot (-0.2)^3 \right) \cdot (0.015 : 0.12 + 0.7)}{1.2 : \left( (-3) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^3 \right) - 0.2}.$$

40.2. Rešiti jednačinu

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2.$$

**40.3.** Rešiti nejednačinu

$$5^{\frac{3x-1}{x+1}} > \sqrt[3]{125^{2x+14}}.$$

**40.4.** Rešiti jednačinu

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

**40.5.** Osnovice trapeza su  $a = 4 + \sqrt{3}$ ,  $b = 1$ , a uglovi na većoj osnovici  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela koje nastaje kada trapez rotira oko svoje veće osnovice.

**40.6.** Cena zlata na berzi svako prepodne poraste za 20%, a svako poslepodne opadne za 20%. Da li će posle 3 dana rada berze cena zlata biti veća ili manja od 80% prvobitne cene?



**REŠENJA  
ZADATAKA**



## Test 1

1.1. Vrednost izraza je  $16\frac{5}{14}$ .

1.2. Iz uslova  $6x - x^2 - 8 \geq 0$  dobijamo  $x \in [2, 4]$ . Primitimo da za svako  $x \in [2, 4]$  važi  $3x - 4 > 0$ . Kvadriranjem jednačine

$$\sqrt{6x - x^2 - 8} = 3x - 4$$

dobijamo kvadratnu jednačinu

$$10x^2 - 30x + 24 = 0,$$

koja nema rešenja u skupu realnih brojeva.

1.3. Data nejednačina je definisana za svako  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Nejednačina je ekvivalentna sa

$$2^{2x} \cdot 2^{\frac{4}{x+1}} < 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x + \frac{4}{x+1}} < 2^4.$$

Odavde dobijamo nejednačinu

$$2x + \frac{4}{x+1} < 4,$$

koja je ekvivalentna sa

$$\frac{2x(x-1)}{x+1} < 0.$$

Rešenje ove nejednačine je  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ , što je i rešenje polazne nejednačine.

1.4. Koristeći trigonometrijske identitete dobijamo

$$\begin{aligned} \sin(x+1) - \sin(3x+3) &= 4\sin^2(x+1)\cos(x+1), \\ -2\sin(x+1)\cos 2(x+1) &= 2\sin(x+1)\sin 2(x+1), \\ \sin(x+1)(\sin 2(x+1) + \cos 2(x+1)) &= 0, \\ \sin(x+1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2(x+1)\right) &= 0, \\ \sin(x+1)\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2(x+1)\right) &= 0. \end{aligned}$$

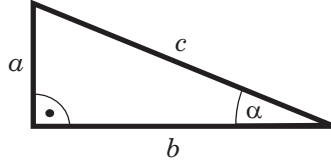
Iz poslednje jednačine sledi

$$x_k + 1 = k\pi \quad \text{ili} \quad \frac{\pi}{4} + 2(x_k + 1) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pa su rešenja polazne jednačine

$$x_k = k\pi - 1 \quad \text{ili} \quad x_k = \frac{(4k-1)\pi}{8} - 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.5. Neka su  $a$ ,  $b$  katete pravouglog trougla i  $\alpha$  ugao naspram katete  $a$ .



Prema definiciji trigonometrijske funkcije sinus je

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

pa je

$$a = c \sin \alpha = 2 \sin \alpha.$$

Koristeći trigonometrijsku jednakost

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

i imajući u vidu da je  $2\alpha = 45^\circ$ ,  $\cos 2\alpha = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ , dobija se

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Zato je jedna kateta

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Primenom Pitagorine teoreme

$$a^2 + b^2 = c^2$$

sledi

$$2 - \sqrt{2} + b^2 = 4, \quad b^2 = 2 + \sqrt{2},$$

odakle je druga kateta

$$b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Površina pravouglog trougla je

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

**1.6.** Neka je  $x = \sqrt[3]{3}$ . Dati izraz  $A$  proširujemo na sledeći način

$$\begin{aligned} A &= \frac{44}{2 + 3x + x^2} = \frac{44(x^2 - 2x + 4)(x^2 - x + 1)}{(x + 2)(x + 1)(x^2 - 2x + 4)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{44(x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 4)}{(x^3 + 8)(x^3 + 1)}. \end{aligned}$$

Kada u dobijenom izrazu zamenimo  $x$  dobijamo

$$A = 7\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3} - 5.$$

Neka je sada  $x = \sqrt[3]{2}$ . Na sličan način kao kod izraza  $A$ , izraz  $B$  postaje

$$B = \frac{1}{2 + 3x + x^2} = \frac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 4}{(x^3 + 8)(x^3 + 1)} = \frac{7\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{2} - 2}{30}.$$

## Test 2

**2.1.** Vrednost izraza je  $\frac{1}{4}$ .

**2.2.** Jednačina je definisana za  $x \neq 0$  i  $3x + 13 > 0$ , tj. za  $x \in (-13/3, 0) \cup (0, +\infty)$ . Transformišimo jednačinu na sledeći način:

$$\begin{aligned} \log_{100} x^2 + \log_{10}(3x + 13) - 1 &= 0, \\ \frac{1}{2} \log_{10} x^2 + \log_{10}(3x + 13) - 1 &= 0, \\ \log_{10} |x| + \log_{10}(3x + 13) - 1 &= 0, \\ \log_{10} \frac{|x|(3x + 13)}{10} &= 0. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine imamo  $|x|(3x + 13) = 10$ . Rešenja ove jednačine su:  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 2/3$ ,  $x_3 = -10/3$  i  $x_4 = -1$ . Budući da rešenje  $x_1 = -5$  ne pripada oblasti definisanosti jednačine, njega odbacujemo, pa su rešenje polazne jednačine  $x \in \{-10/3, -1, 2/3\}$ .

**2.3.** Racionalisanjem datog korena jednačine imamo da je  $x_1 = \sqrt{15} - 4$ . Neka je

$$x^2 + bx + c = 0, \quad b, c \in \mathbb{Q},$$

jednačina koju treba naći. Na osnovu Vietovih formula za ovu kvadratnu jednačinu je

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c.$$

Da bi uslov zadatka  $b, c \in \mathbb{Q}$  bio ispunjen, a s obzirom na vrednost korena  $x_1$ , mora biti da je  $x_2 = -\sqrt{15} - 4$ . Sada je  $b = 8, c = 1$ , pa je tražena kvadratna jednačina

$$x^2 + 8x + 1 = 0.$$

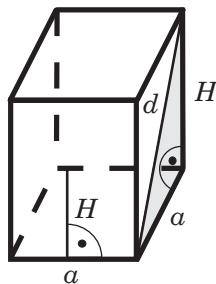
**2.4.** Imamo sledeći niz ekvivalentnih jednačina:

$$\begin{aligned} \cos(x-1) - \cos(3x-3) &= 4 \sin^3(x-1), \\ 2 \sin(x-1) \sin 2(x-1) &= 4 \sin^3(x-1), \\ 4 \sin^2(x-1) \cos(x-1) &= 4 \sin^3(x-1), \\ \sin^2(x-1) (\cos(x-1) - \sin(x-1)) &= 0, \\ \sin^2(x-1) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x-1) \right) &= 0, \\ \sin^2(x-1) \sin \left( \frac{\pi}{4} - x + 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja date jednačine su

$$x_k = k\pi + 1 \quad \text{ili} \quad x_k = \frac{(1-4k)\pi}{4} + 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**2.5.** Stranica romba je označena sa  $a$ , dijagonala strane sa  $d$ . Prizma je prava, pa se visina  $H$  poklapa sa njenom ivicom. Takođe, najkraće rastojanje naspramnih strana je jednako visini romba, što znači da su visine romba i prizme jednake.



Strana prizme je pravougaonik stranica  $a, H$  i njena površina je  $S = aH$ . Osnova prizme je romb, pa prizma ima četiri jednake strane i prema uslovu zadatka sledi da je omotač  $M = 4S = 4aH = 48$ . Još, prema Pitagorinoj teoremi, iz uslova  $d = 5$  sledi  $d^2 = a^2 + H^2 = 25$ . Dakle, dobijamo sistem jednačina

$$4aH = 48, \quad a^2 + H^2 = 25.$$

Iz prve jednačine je  $a = 12/H$ , što zamenom u drugu daje

$$H^4 - 25H^2 + 144 = 0.$$

Dobijena jednačina je bikvadratna i rešava se smenom  $t = H^2$ , posle koje postaje kvadratna jednačina

$$t^2 - 25t + 144 = 0.$$

Rešenja kvadratne jednačine su

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2},$$

tj.  $t_1 = 16$ ,  $t_2 = 9$ , pa su rešenja bikvadratne jednačine

$$H_1 = \sqrt{t_1} = 4, \quad H_2 = \sqrt{t_2} = 3.$$

Dalje je

$$a_1 = \frac{12}{H_1} = 3, \quad a_2 = \frac{12}{H_2} = 4.$$

Za visinu  $H$  i stranicu  $a$  romba važi  $H \leq a$ , pa je

$$H = H_2 = 3, \quad a = a_2 = 4.$$

Baza prizme je

$$B = aH = 12$$

i za zapreminu se dobija

$$V = BH = 36.$$

- 2.6.** Kako je 2% iskopanog uglja voda, to je 98% čistog uglja, što znači da uglja ima  $0.98 \cdot 2210 \text{ t} = 2165.8 \text{ t}$ . Kada je procenat vlage porastao na 15%, ta ista količina uglja predstavlja sada 85% ukupne težine, pa je ukupna težina rude na stovarištu  $(100/85) \cdot 2165.8 \text{ t} = 2548 \text{ t}$ . Znači da se ukupna težina povećala za 338 t.

### Test 3

- 3.1.** Vrednost izraza je  $26\frac{37}{40}$ .
- 3.2.** Zadatak ima smisla ako je  $x \geq 6$ . Dva puta kvadriranjem leve i desne strane dobijamo da je

$$4x - 12 = \sqrt{(7x + 1)(3x - 18)},$$

$$5x^2 - 27x = 162,$$

te je  $x_1 = 9$  i  $x_2 = -18/5$ . Zbog uslova  $x \geq 6$  rešenje  $x_2$  ne dolazi u obzir. Zamenom  $x_1 = 9$  u datoj jednačini vidimo da to jeste rešenje.

**3.3.** Nejednačina je definisana za  $2 < x < 3$ . Transformacijom date nejednačine sledi:

$$\log_7 \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2) < 1,$$

$$\log_7 \log_7(x-2)^{-7} < 1,$$

$$0 < \log_7(x-2)^{-7} < 7,$$

$$1 < (x-2)^{-1} < 7.$$

Dakle, rešenje nejednačine je  $x \in (15/7, 3)$ .

**3.4.** Jednačinu rešavamo na sledeći način:

$$\sin x - \sin \frac{x}{3} = 0,$$

$$\sin \left( \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} \right) - \sin \frac{x}{3} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3} - \sin \frac{x}{3} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{3} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{3} \right) + \cos \frac{x}{3} 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{3} \left( 2 - 4 \sin^2 \frac{x}{3} \right) = 0,$$

$$2 \sin \frac{x}{3} \left( 1 - \sqrt{2} \sin \frac{x}{3} \right) \left( 1 + \sqrt{2} \sin \frac{x}{3} \right) = 0.$$

Dalje imamo:

$$\sin \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow x_k = 3k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_k = \frac{3(8k+1)\pi}{4} \quad \text{ili} \quad x_k = \frac{3(8k+3)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_k = \frac{3(8k-1)\pi}{4} \quad \text{ili} \quad x_k = \frac{3(8k-3)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zadatak se jednostavnije rešava pomoću transformacije

$$\sin x - \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3}.$$

**3.5.** Iz  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$  sledi

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

i, prema Pitagorinoj teoremi,

$$2ab \leq c^2, \quad c^2 + 2ab \leq c^2 + c^2 = 2c^2.$$



Iz  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  dalje sledi

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab \leq 2c^2,$$

pa je zaista

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Jednakost  $a + b = c\sqrt{2}$  važi ako je  $(a - b)^2 = 0$ , tj.  $a = b$ , što znači da je pravougli trougao jednakokraki.

**3.6. a)** Neka je  $z = x + iy$ . Na osnovu uslova zadatka sledi

$$|x + i(y - 1)| = |(x + 2) + iy|,$$

tj.

$$x^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2.$$

Odavde dobijamo da je geometrijsko mesto tačaka prava zadata jednačinom

$$4x + 2y + 3 = 0.$$

**b)** Analogno kao u delu pod a) sledi

$$\begin{aligned} 1 &< |(x + 2) + i(y - 3)| < 2, \\ 1 &< \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} < 2, \\ 1 &< (x + 2)^2 + (y - 3)^2 < 4. \end{aligned}$$

Dakle, geometrijsko mesto tačaka je kružni prsten.

## Test 4

**4.1.** Vrednost datog izraza je 9.

**4.2.** Jednačina ima smisla za  $x \geq 5/2$ . Kvadriranjem jednačine

$$\sqrt{x + 1} \sqrt{2x - 5} = x + 3,$$

dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 - 9x - 14 = 0,$$

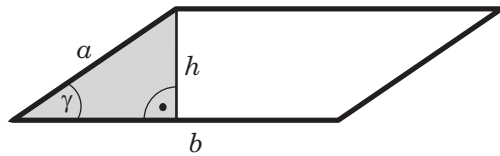
čija su rešenja  $x_1 = (9 - \sqrt{137})/2$  i  $x_2 = (9 + \sqrt{137})/2$ . S obzirom na uslov  $x \geq 5/2$ , sledi da data jednačina ima jedinstveno rešenje  $x = (9 + \sqrt{137})/2$ .

**4.3.** Nejednačina je definisana za svako  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Transformacijom nejednačine sledi:

$$\begin{aligned} 5^{-x} < 25^{-\frac{1}{x+1}} &\Leftrightarrow 5^{-x} < 5^{-\frac{2}{x+1}} &\Leftrightarrow -x < -\frac{2}{x+1} \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{x^2 + x - 2}{x+1} &\Leftrightarrow 0 < \frac{(x-1)(x+2)}{x+1}. \end{aligned}$$

Rešavajući poslednju nejednačinu dobijamo da je rešenje polazne nejednačine  $x \in (-2, -1) \cup (1, +\infty)$ .

- 4.4.** a)  $\sin \alpha = -\sqrt{35}/6$ ,  $\tan \alpha = \sqrt{35}$ ,  $\cot \alpha = \sqrt{35}/35$ ;  
 b)  $\sin \alpha = 13\sqrt{233}/233$ ,  $\cos \alpha = -8\sqrt{233}/233$ ,  $\tan \alpha = -13/8$ ;  
 c)  $\sin \alpha = \sqrt{6}/3$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{3}/3$ ,  $\cot \alpha = \sqrt{2}/2$ ;  
 d)  $\cos \alpha = -12/13$ ,  $\tan \alpha = -5/12$ ,  $\cot \alpha = -12/5$ .
- 4.5.** Na slici je prikazana samo osnova paralelopipeda sa visinom  $h$  koja odgovara stranici  $b$ .



Visina  $h$  paralelograma se određuje iz  $h/a = \sin \gamma$  i dobija se

$$h = a \sin \gamma = 3 \sin 30^\circ = \frac{3}{2},$$

pa je baza

$$B = bh = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12.$$

Različite strane paralelopipeda su

$$S_1 = aH = 3H, \quad S_2 = bH = 8H,$$

gde je  $H$  visina paralelopipeda. Paralelopiped ima jednake naspramne strane, pa je omotač

$$M = 2S_1 + 2S_2 = 22H = 220,$$

odakle je visina

$$H = 10.$$

Površina i zapremina paralelopipeda su

$$P = 2B + M = 24 + 220 = 244, \quad V = BH = 12 \cdot 10 = 120.$$

- 4.6.** Ako sa  $x$  označimo masu srebra finoće 600 ‰, a sa  $y$  masu srebra finoće 900 ‰ koje treba da se pomešaju, na osnovu uslova zadatka postavljamo proporciju

$$x : y = (900 - 850) : (850 - 600),$$

odakle je  $x : y = 1 : 5$ . Kako je  $x + y = 600$  grama, iz proporcije imamo da je  $y = 5x$ , pa ako to zamenimo u drugoj jednačini, dobijamo  $x + 5x = 6x = 600$  grama, tj.  $x = 100$  grama. Sada je  $y = 600 - 100 = 500$  grama.

## Test 5

- 5.1.** Dati izraz ima vrednost 1.  
**5.2.** Da bi jednačina imala smisla mora da važi  $x > 1$ ,  $x > -1$  i  $x < 7$ , što je ekvivalentno sa  $x \in (1, 7)$ . Dalje imamo

$$\log_{2^{-1}}(x-1) + \log_{0.5}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1,$$

$$\log_2(x-1)^{-1} + \log_2(x+1)^{-1} + \log_2(7-x)^2 = 1,$$

$$\log_2 \frac{(7-x)^2}{(x-1)(x+1)} = 1.$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$\frac{(7-x)^2}{x^2-1} = 2,$$

odakle se dobija kvadratna jednačina

$$x^2 + 14x - 51 = 0,$$

čija su rešenja  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -17$ . S obzirom na uslov  $x \in (1, 7)$ , jedino rešenje jednačine je  $x = 3$ .

- 5.3.** Razlikovaćemo dva slučaja.  
 1° Za  $x \geq 7/2$  nejednačina postaje

$$\sqrt{x^2 - 2x + 9} \leq 3x - 5,$$

čije je rešenje  $x \geq 7/2$ .

2° Za  $x < 7/2$  dobijamo

$$\sqrt{x^2 - 2x + 9} \leq -x + 9,$$

odakle je  $x < 7/2$ .

Dakle, rešenje polazne nejednačine je  $x \in \mathbb{R}$ .

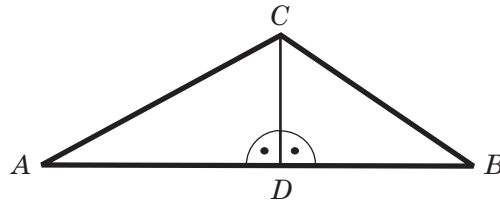
5.4. Transformišimo datu jednačinu na način:

$$\begin{aligned}\sin x - \sin \frac{5x}{8} \cos \frac{3x}{8} &= 0, \\ \sin \left( \frac{3x}{8} + \frac{5x}{8} \right) - \sin \frac{5x}{8} \cos \frac{3x}{8} &= 0, \\ \sin \frac{3x}{8} \cos \frac{5x}{8} + \cos \frac{3x}{8} \sin \frac{5x}{8} - \sin \frac{5x}{8} \cos \frac{3x}{8} &= 0, \\ \sin \frac{3x}{8} \cos \frac{5x}{8} &= 0.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo rešenja polazne jednačine

$$x_k = \frac{8k\pi}{3}, \quad x_k = \frac{4(2k+1)\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.5. Kako je  $CD$  visina trougla  $ABC$ , trouglovi  $ADC$  i  $DBC$  su pravougli.



Trougao  $DBC$  ima katete  $CD = \sqrt{3}$ ,  $DB = AB - AD = 3 - AD$  i hipotenuzu  $BC = AD$ . Prema Pitagorinoj teoremi je

$$CD^2 + DB^2 = BC^2$$

i dalje

$$3 + (3 - AD)^2 = AD^2,$$

odakle je

$$AD = 2.$$

Primenjujući Pitagorinu teoremu na trougao  $ADC$  sa katetama  $AD = 2$ ,  $CD = \sqrt{3}$ , dobija se

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}.$$

5.6. Pretpostavimo da je na početku školske godine bilo  $x$  učenika. Od tog broja je  $0.46x$  devojčica i  $0.54x$  dečaka. Kako je tokom godine školu napustilo 30 dečaka, broj dečaka na kraju godine je  $0.54x - 30$ . S druge strane, kako je školu napustilo ukupno 45 učenika preostalo ih je  $x - 45$ , od čega je devojčica  $0.48(x - 45)$ , a

dečaka  $0.52(x - 45)$ . Izjednačavanjem broja dečaka dobijenih u ova dva slučaja dobijamo jednačinu

$$0.54x - 30 = 0.52(x - 45),$$

odakle je  $x = 330$ . Dakle, upisano je 330 učenika, a završilo njih 285.

## Test 6

**6.1.** Vrednost izraza je 15.6961.

**6.2.** Zadatak ima smisla za  $x > 2^9$ . Transformacijom date jednačine dobijamo

$$\log_3(\log_2 x - 9) = \log_3 9 \left(1 - \frac{8}{\log_2 x}\right) \Leftrightarrow \log_2 x - 9 = 9 \left(1 - \frac{8}{\log_2 x}\right).$$

Uvođenjem smene  $t = \log_2 x$  poslednja jednačina postaje

$$t^2 - 18t + 72 = 0,$$

čija su rešenja  $t_1 = 12$  i  $t_2 = 6$ . Odatle je  $x_1 = 2^{12}$  i  $x_2 = 2^6$ . S obzirom na uslov  $x > 2^9$ , zadatak ima samo jedno rešenje  $x = 2^{12}$ .

**6.3.** Da bi nejednačina imala smisla mora da bude  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$  i  $x \neq -2/3$ . Nejednačinu rešavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{3x + 2} &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{3x + 2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x - 1)(x + 1)(3x + 2)} \leq 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-2/3, 1). \end{aligned}$$

**6.4.** Imamo

$$\cos 9x + \cos 5x + 2 \sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 7x \cos 2x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0.$$

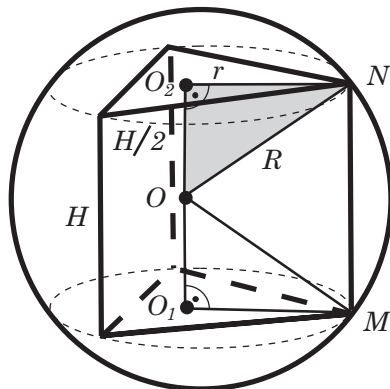
Dalje, koristeći trigonometrijske identitete dobijamo

$$\begin{aligned} 2 \cos 7x (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) &= 0, \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(2 \cos 7x - 1) &= 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) (2 \cos 7x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine slede rešenja:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 &\Rightarrow x_k = \frac{(4k + 1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 &\Rightarrow x_k = \frac{(4k - 1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos 7x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x_k = \frac{1}{7} \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 6.5.** Trostrana prizma je pravilna, što znači da joj je osnova jednakostranični trougao, ivice su normalne na bazu i jednake visini  $H$  prizme. Kružnice opisane oko baza prizme pripadaju sferi opisanoj oko prizme. Kroz centre  $O_1, O_2$  opisanih kružnica poluprečnika  $r$  i centar  $O$  sfere poluprečnika  $R$  postavljena je visina prizme i uočena su temena  $M, N$  baza.



Iz  $V = BH$  i  $H = 2$  sledi

$$B = \frac{V}{H} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Kako je  $B$  jednakostranični trougao, to je  $B = a^2\sqrt{3}/4$ , odakle je  $a^2 = 4B/\sqrt{3} = 4/3$  i stranica baze iznosi

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

a poluprečnik opisane kružnice

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Trouglovi  $OO_1M, OO_2N$  su pravougli sa jednakim hipotenzama  $R$  i katetama  $r$ , pa su podudarni (pravilo SSU). Iz podudarnosti sledi jednakost drugih kateta i, zbog  $OO_1 + OO_2 = H$ ,

$$OO_1 = OO_2 = \frac{H}{2} = 1.$$

Prema Pitagorinoj teoremi je  $R^2 = r^2 + 1 = 13/9$  i konačno

$$R = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

- 6.6.** Petar je umesto  $3/8$  ukupno zarađene sume novca  $x$  dobio  $3/5$ , pa je

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{8}\right)x = 360 \Leftrightarrow x = 1600 \text{ din.}$$

Da je raspodela bila pravilna, Petar bi dobio 600 din, a Kosta 1000 din. Dakle, Petar je dobio 22.5% više novca nego što mu pripada.

## Test 7

**7.1.** Vrednost izraza je 1.

**7.2.** Iz uslova

$$1 - \frac{2}{1-x} \geq 0 \quad \text{i} \quad x \neq 1,$$

sledi da jednačina ima smisla za  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Kako za  $x > 1$  važi

$$\frac{1}{x-1} > 0,$$

jednačina može imati rešenje samo kada je  $x \in (-\infty, -1)$ . Kvadriranjem jednačine dobijamo

$$4 \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

odakle je rešenje  $x = -\sqrt{5}/2$ .

**7.3.** Nejednačina je definisana za svako  $x \neq -1$  i ekvivalentna je nejednačini

$$3^{\frac{2x-13}{x+1}} > 3^{2x+17}.$$

Iz ove nejednačine sledi

$$\frac{2x-13}{x+1} > 2x+17,$$

odakle dobijamo  $x \in (-\infty, -6) \cup (-5/2, -1)$ .

**7.4.** Deljenjem jednakosti  $\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$  sa  $\sin \alpha \cos \alpha$  ( $\neq 0$ ) dobijamo jednačinu

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

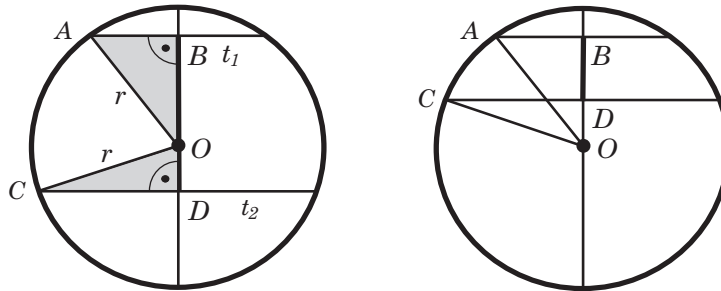
Uvodeći smenu  $t = \tan \alpha$  dobijamo

$$t - \frac{2}{t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0,$$

čija su rešenja  $t_1 = 2$  i  $t_2 = -1$ . S obzirom na uslov  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , sledi da je  $\tan \alpha = 2$ .

**7.5.** Sa  $O$  označimo centar kruga, sa  $A$  i  $C$  krajeve tetiva  $t_1$  i  $t_2$ , a sa  $B$  i  $D$  njihove sredine. Prečnik kruga, normalan na tetivu, polovi tetivu. Kako su  $t_1$  i  $t_2$  paralelne tetive, one imaju zajednički normalan prečnik, koji ih seče upravo u

tačkama  $B$  i  $D$ . Na slikama su prikazana dva moguća slučaja, kada su tetive sa raznih i kada su sa iste strane u odnosu na centar kruga.



Prema uslovima zadatka je

$$OA = OC = r = 25, \quad AB = \frac{t_1}{2} = 7, \quad CD = \frac{t_2}{2} = 24.$$

Trouglovi  $OAB$  i  $OCD$  su pravougli i, na osnovu Pitagorine teoreme, sledi

$$OB^2 + AB^2 = r^2, \quad OD^2 + CD^2 = r^2,$$

tj.

$$OB^2 + 49 = 625, \quad OD^2 + 576 = 625.$$

Zato je

$$OB = 24, \quad OD = 7.$$

Traženo rastojanje između tetiva  $t_1$  i  $t_2$  je

$$BD = OB + OD = 31, \quad BD = OB - OD = 17$$

u slučajevima sa prve i druge slike redom.

- 7.6.** Procenat učenika koji su uradili sva tri zadatka je  $100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$ , pa ako sa  $x$  obeležimo ukupan broj učenika koji su radili pismenu vežbu, važi proporcija  $x : 14 = 100 : 56$ , odakle je  $x = (14 \cdot 100)/56 = 25$  učenika.

## Test 8

**8.1.** Izraz ima vrednost  $2\frac{1}{3}$ .

**8.2.** Neka kvadratna jednačina koja se traži ima oblik

$$x^2 + ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$



Racionalisanjem datog korena dobijamo

$$x_1 = \frac{1}{2 + i\sqrt{5}} = \frac{2 - i\sqrt{5}}{9}.$$

Kako ova jednačina ima realne koeficijente, drugi koren jednačine je

$$x_2 = \bar{x}_1 = \frac{2 + i\sqrt{5}}{9}.$$

Sada, iz Vietovih formula dobijamo

$$a = -(x_1 + x_2) = -\frac{4}{9},$$

$$b = x_1 x_2 = \frac{1}{9},$$

pa je tražena kvadratna jednačina

$$x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{9} = 0,$$

odnosno

$$9x^2 - 4x + 1 = 0.$$

**8.3.** Dajemo uputstvo. Datu nejednačinu svesti na oblik

$$\sqrt{\log_4(x-3)} > \log_4 \frac{x-3}{64} = \log_4(x-3) - 3, \quad x \geq 4,$$

a zatim uvesti smenu

$$\log_4(x-3) = t^2, \quad t \geq 0.$$

**8.4.** Imamo sledeći niz ekvivalentnih jednačina

$$3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 5 - 8 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$2 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha = 8 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4.$$

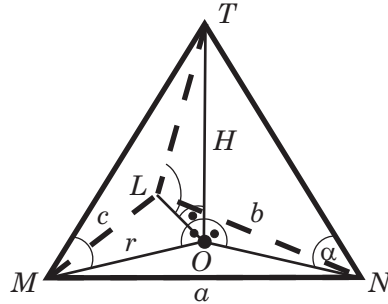
Uvođenjem smene  $\cot \alpha = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu

$$3t^2 - 4t + 1 = 0,$$

odakle je  $\cot \alpha = 1$  ili  $\cot \alpha = 1/3$ .

- 8.5. Temena osnove su  $L, M, N$ , teme piramide je  $T$ , a visina piramide  $H = OT$ . Visina  $H$  je normalna na osnovu, pa je

$$\alpha = \angle OLT = \angle OMT = \angle ONT.$$



Kako je

$$\frac{H}{OL} = \frac{H}{OM} = \frac{H}{ON} = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

to je

$$OL = OM = ON = \frac{H}{\sqrt{3}} = r,$$

što znači da je  $O$  centar, a  $r$  poluprečnik kruga opisanog oko osnove. Koristeći obrasce za površinu trougla, dobijamo

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r},$$

gde je poluobim osnove

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(9+8+7) = 12.$$

Zato je

$$B = \sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)} = 12\sqrt{5},$$

$$r = \frac{abc}{4B} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 12\sqrt{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}},$$

$$H = r\sqrt{3} = \frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

i tražena zapremina iznosi

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{12\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = 42\sqrt{3}.$$

8.6. Po binomnoj formuli je

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20} = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} 2^{\frac{i}{2}} \cdot 3^{\frac{20-i}{3}}.$$

Tražimo sve one brojeve od 0 do 20 koji su deljivi sa 2 (parni), i istovremeno je razlika  $20 - i$  deljiva sa 3. To su brojevi 2, 8, 14, 20. U suprotnom, član u binomnom razvoju je proizvod jednog racionalnog broja sa nekim od brojeva  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{9}$ ,  $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$ . Da nijedan od navedenih brojeva nije racionalan pokazuje se na potpuno isti način kao što se to pokazuje za broj  $\sqrt{2}$ . Dakle, u posmatranom binomnom razvoju ima četiri racionalna sabirka.

## Test 9

9.1. Vrednost izraza je 1.

9.2. Transformišući jednačinu dobijamo

$$49^{x+2} + 6 \cdot 7^{x+1} - 6^{-\log_6 7} = 0,$$

$$7^{2x+4} + 6 \cdot 7 \cdot 7^x - 7^{-1} = 0,$$

$$7^5 \cdot 7^{2x} + 6 \cdot 7^2 \cdot 7^x - 1 = 0,$$

odakle je  $7^x = 7^{-3}$ , pa je rešenje jednačine  $x = -3$ .

9.3. Rešenje je  $x \in (-1, -1/5) \cup (1, +\infty)$ .

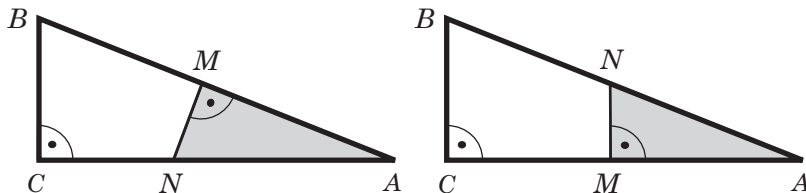
9.4. Važi sledeće

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} &= \frac{1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

9.5. Uvođenjem oznaka kao na prvoj od sledećih slika, iz uslova zadatka sledi

$$AB = c = 40, \quad BM = MA = 20, \quad MN = n = 15.$$



Prema Pitagorinoj teoremi, iz pravouglog trougla  $MNA$  se dobija:

$$MN^2 + MA^2 = NA^2, \quad 15^2 + 20^2 = NA^2, \quad NA^2 = 625, \quad NA = 25.$$

Trouglovi  $ABC$  i  $AMN$  su slični jer imaju dva jednaka ugla: prav ugao i zajednički ugao kod temena  $A$ . Na drugoj slici je trougao  $AMN$  nacrtan tako da je sličnost očigledna. Iz ove sličnosti sledi

$$CA : MA = BA : NA, \quad CB : MN = BA : NA$$

i, zamenom konkretnih podataka,

$$CA : 20 = 40 : 25, \quad CB : 15 = 40 : 25.$$

Zato su katete trougla  $ABC$

$$b = CA = \frac{20 \cdot 40}{25} = 32, \quad a = CB = \frac{15 \cdot 40}{25} = 24.$$

Obim i površina trougla  $ABC$  su

$$O = a + b + c = 24 + 32 + 40 = 96, \quad P = \frac{ab}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384.$$

### 9.6. Kako je

$$\begin{aligned} \left(6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{4}}\right)^{100} &= \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 6^{\frac{i}{3}} \cdot 2^{\frac{100-i}{4}} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 3^{\frac{i}{3}} \cdot 2^{\frac{300+i}{12}} \\ &= \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 3^{\frac{i}{3}} \cdot 2^{25 + \frac{i}{12}}, \end{aligned}$$

to tražimo sve brojeve od 0 do 100 koji su deljivi sa 12. To su brojevi 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96. U posmatranom izrazu ima devet racionalnih sabiraka.

## Test 10

**10.1.** Vrednost izraza je  $\frac{2}{5}$ .

**10.2.** Jednačina je definisana za  $x > 0$  i  $x \geq 4/3$ , tj. za  $x \geq 4/3$ . Dalje imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} &= \sqrt{3x - 4}, \\ x + \frac{1}{x} + 2 &= 3x - 4, \end{aligned}$$

odakle je  $x = (3 + \sqrt{11})/2$ .

**10.3.** Korišćenjem obrasca  $\log_m n = \frac{\log_k n}{\log_k m}$  imamo

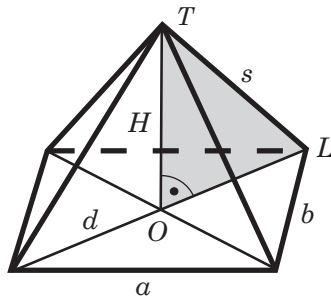
$$\begin{aligned} (\log_{11} 13 + \log_{13} 11)^{-1} + \log_{289} 17 &= \left( \frac{\log_4 13}{\log_4 11} + \frac{\log_4 11}{\log_4 13} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \log_{17} 17 \\ &= \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2)} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{(a + b)^2}{2(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

**10.4.** Transformišimo datu jednačinu na sledeći način

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{2x}{5} \cos \frac{3x}{5} - \cos \frac{3x}{5} &= 0, \\ \cos \frac{3x}{5} \left( 2 \sin \frac{2x}{5} - 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Nadalje rešavamo na standardan način.

**10.5.** Dijagonala pravougaonika je označena sa  $d$ , presek dijagonala sa  $O$  i jedno teme sa  $L$ . Vrh piramide je  $T$ , a njena visina je  $H$ .



Ugao između susedenih stranica  $a$ ,  $b$  pravougaonika je prav i prema Pitagorinoj teoremi sledi

$$d^2 = a^2 + b^2 = 144 + 81 = 225, \quad d = 15.$$

Dijagonale pravougaonika se polove, pa je  $OL = d/2$  i iz pravouglog trougla  $OLT$  dalje sledi  $H^2 + (d/2)^2 = s^2$ , tj.

$$H^2 = s^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \left( \frac{25}{2} \right)^2 - \left( \frac{15}{2} \right)^2 = \frac{400}{4} = 100, \quad H = 10.$$

Sada je

$$B = ab = 12 \cdot 9 = 108, \quad V = \frac{BH}{3} = \frac{108 \cdot 10}{3} = 360.$$

**10.6.** Polazeći od leve strane date jednakosti dobijamo

$$\frac{\sqrt[4]{0.98} - \sqrt[4]{0.02}}{\sqrt[4]{0.98} + \sqrt[4]{0.02}} = \frac{\sqrt[4]{49} - \sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{49} + \sqrt[4]{1}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{7} + 1} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3},$$

što je i trebalo dokazati.

## Test 11

**11.1.** Rešenje je  $x = 4.5$ .

**11.2.** Za  $x > 1$  je

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} > 3,$$

a za  $0 \leq x < 1$  je

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} < 3.$$

Dakle, jedino rešenje jednačine je  $x = 1$ .

**11.3.** Napišimo datu nejednačinu u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} 2^{\frac{2x-1}{2}} + 2^{\frac{2x-5}{2}} &> 25^{\frac{2x-7}{2}} - 5^{2x-8}, \\ 2^x \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + 2^x \cdot 2^{-\frac{5}{2}} &> 5^{2x} \cdot 5^{-7} - 5^{2x} \cdot 5^{-8}, \\ 2^x \cdot \frac{5}{2^{\frac{5}{2}}} &> 25^x \cdot \frac{4}{5^8}, \\ \left(\frac{2}{25}\right)^x &> \left(\frac{2}{25}\right)^{\frac{9}{2}}, \end{aligned}$$

odakle sledi da je  $x < 9/2$ .

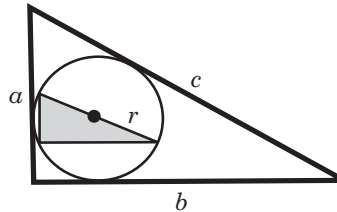
**11.4.** Sledeće jednačine su ekvivalentne

$$\begin{aligned} \sin x - \sin \frac{7x}{3} + \sin \frac{4x}{3} &= 0, \\ -2 \sin \frac{2x}{3} \cos \frac{5x}{3} + 2 \sin \frac{2x}{3} \cos \frac{2x}{3} &= 0, \\ \sin \frac{2x}{3} \left( \cos \frac{2x}{3} - \cos \frac{5x}{3} \right) &= 0, \\ \sin \frac{2x}{3} \sin \frac{7x}{6} \sin \frac{x}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, sva rešenja polazne jednačine su:

$$x_k = \frac{3k\pi}{2}, \quad x_k = \frac{6k\pi}{7}, \quad x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 11.5.** Upisani trougao je sličan polaznom, pa je takođe pravougli. Prav ugao upisanog trougla je periferni ugao kruga, što znači da je njegova hipotenuza istovremeno i prečnik kruga.



Posmatramo veći trougao. Na osnovu zadatih podataka, hipotenuza  $c$ , poluobim  $s$  i površina  $P$  ovog trougla su

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25, \\ s &= \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(15 + 20 + 25) = 30, \\ P &= \frac{ab}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150. \end{aligned}$$

Koristeći obrazac za površinu trougla

$$P = rs,$$

gde je  $r$  poluprečnik upisanog kruga, nalazimo

$$r = \frac{P}{s} = \frac{150}{30} = 5.$$

Posmatramo sada manji trougao sa katetama  $a_1$ ,  $b_1$  i hipotenuzom

$$c_1 = 2r = 10.$$

Iz pretpostavljene sličnosti trouglova sledi

$$a : a_1 = c : c_1, \quad b : b_1 = c : c_1,$$

odakle je

$$a_1 = \frac{ac_1}{c} = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6, \quad b_1 = \frac{bc_1}{c} = \frac{20 \cdot 10}{25} = 8.$$

Obim i površina upisanog trougla su

$$O = a_1 + b_1 + c_1 = 6 + 8 + 10 = 24, \quad P = \frac{a_1 b_1}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

**11.6.** Iz obrnute proporcionalnosti datih veličina sledi  $54 : x = 126 : 84$ , odakle je  $x = (54 \cdot 84)/126 = 36$  zubaca.

## Test 12

**12.1.** Vrednost izraza je  $\frac{97}{96}$ .

**12.2.** Zapišimo jednačinu u obliku

$$6 \cdot \frac{2^{-3}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = 1.$$

Uvođenjem smene

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = t,$$

uz uslove  $t > 0$  i  $t \neq 1$ , dobijamo jednačinu  $4t^2 = 1$ , odakle je  $t = 1/2$ , pa je rešenje jednačine

$$x = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2 - \log_{10} 3}.$$

**12.3.** Razlikovaćemo dva slučaja.

1° Za  $x \geq 0$  imamo redom

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 8} + 2x &\leq 2 + 3x, \\ \sqrt{x^2 + 8} &\leq 2 + x, \\ x^2 + 8 &\leq 4 + 4x + x^2, \end{aligned}$$

odakle je  $x \in [1, +\infty)$ .

2° Za  $x < 0$  dobijamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 8} + 2x &\leq 2 - 3x, \\ \sqrt{x^2 + 8} &\leq 2 - 5x, \\ 6x^2 - 5x - 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

odakle je  $x \in (-\infty, -1/6]$ .



Rešenje nejednačine je  $x \in (-\infty, -1/6] \cup [1, +\infty)$ .

**12.4.** Koristeći trigonometrijske identitete dobijamo

$$\begin{aligned}\sin 5x - \sin 3x + \sin 2x &= 0, \\ 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos x &= 0.\end{aligned}$$

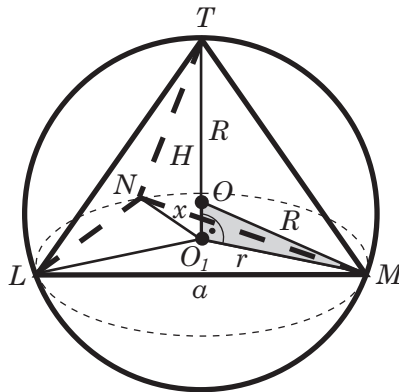
Dalje je

$$\begin{aligned}\sin x (\cos 4x + \cos x) &= 0, \\ \sin x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} &= 0,\end{aligned}$$

odakle dobijamo rešenja

$$x_k = k\pi, \quad x_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad x_k = \frac{(2k+1)\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**12.5.** Temena osnove su  $L, M, N$ , teme piramide je  $T$ , a visina  $H = O_1T$ .



Piramida je pravilna, što znači da je osnova  $B$  jednakostranični trougao, tj.

$$LM = MN = LN = a.$$

Iz uslova zadatka i obrasca za površinu jednakostraničnog trougla sledi

$$V = \frac{BH}{3}, \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} = B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad a^2 = \frac{8}{3},$$

odakle je

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ivice pravilne piramide su jednake, tj.

$$LT = MT = NT.$$

Ove ivice su hipotenuze pravougljih trouglova  $O_1LT$ ,  $O_1MT$ ,  $O_1NT$ , koji imaju zajedničku katetu  $H$ , pa su trouglovi podudarni (pravilo SSU) i važi

$$O_1L = O_1M = O_1N = r.$$

Dakle,  $O_1$  je centar, a  $r$  poluprečnik kruga opisanog oko trougla  $LMN$  i iznosi

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Neka je  $O$  centar sfere opisane oko piramide,  $R$  njen poluprečnik i  $O_1O = x$ . Tada je  $x + R = H$  i, iz pravouglog trougla  $O_1OM$ ,  $x^2 + r^2 = R^2$ , odnosno

$$x + R = 3, \quad x^2 + \frac{8}{9} = R^2.$$

Zamenom  $x = 3 - R$  iz prve jednačine u drugu, dobija se

$$(3 - R)^2 + \frac{8}{9} = R^2, \quad 9 - 6R + \frac{8}{9} = 0, \quad 6R = \frac{89}{9}$$

i na kraju

$$R = \frac{89}{54}.$$

**12.6.** Zadatak se rešava slično kao zadaci 8.6 i 9.6.

## Test 13

**13.1.** Vrednost izraza je 51.

**13.2.** Rešenje je  $x = 2 - \sqrt{5}$ .

**13.3.** Nejednačinu rešavamo na sledeći način

$$\begin{aligned} \log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4 &\Leftrightarrow \frac{\log_2 x - \log_2 4}{\log_2(x-2)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-3} \leq 0 \wedge x > 0 \wedge x > 2 \wedge x \neq 3 &\Leftrightarrow x \in (3, 4]. \end{aligned}$$

**13.4.** Data jednačina je definisana za  $\cos \frac{x}{3} \neq 0$ , tj. za svako  $x \neq \frac{3(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \cos x + \cos \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} &= 0, \\ 2 \cos \frac{2x}{3} \cos \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} &= 0, \\ 2 \cos \frac{x}{3} \left( \cos \frac{2x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} \right) &= 0, \\ \cos \frac{2x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} &= 0, \\ 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Iz kvadratne jednačine po  $\sin \frac{x}{3}$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} = 0$$

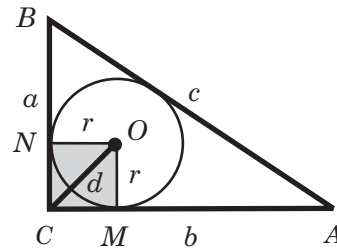
sledi

$$\sin \frac{x}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \sin \frac{x}{3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Kako je  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$ , prvu jednakost odbacujemo, pa ostaje

$$\frac{x_k}{3} = \arcsin \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) + 2k\pi, \quad \frac{x_k}{3} = \pi - \arcsin \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 13.5.** Neka je  $O$  centar i  $r$  poluprečnik upisane kružnice,  $M$ ,  $N$  dodirne tačke kružnice i kateta, a  $d = OC$  traženo rastojanje.



S obzirom na  $a = 3$ ,  $b = 4$ , hipotenuza  $c$ , poluobim  $s$  i površina  $P$  su

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5, \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 6, \quad P = \frac{ab}{2} = 6.$$

Zato iz

$$P = rs$$

sledi

$$r = \frac{P}{s} = 1.$$

Poluprečnici  $OM$  i  $ON$  su normalni na katete, pa su sva četiri ugla četvorougla  $ONCM$  prava. Četvorougao je, dakle, kvadrat stranice  $r$ . Rastojanje  $d$  je dijagonala kvadrata i važi

$$d = r\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

- 13.6.** Zadatak rešavamo slično kao zadatke 8.6, 9.6 i dobijamo šest racionalnih sabiraka za  $i \in \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$ .

## Test 14

**14.1.** Vrednost izraza je 2.

**14.2.** Jednačina

$$64^{\frac{1}{x-1}} + 4 \cdot 2^{\frac{3}{x-1}-1} - 24 = 0$$

je definisana za svako  $x \neq 1$ . Uvođenjem smene

$$2^{\frac{3}{x-1}} = t$$

dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 + 2t - 24 = 0,$$

čija su rešenja  $t_1 = -6$  i  $t_2 = 4$ . Iz uslova  $t > 0$  sledi  $t = 4$ , pa je  $x = 5/2$ .

**14.3.** Za  $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$  nejednačina postaje

$$x^2 - x - 3 \geq 0,$$

čijim rešavanjem dobijamo  $x \in (-\infty, -2] \cup [(1 + \sqrt{13})/2, +\infty)$ .

Za  $x \in (-2, 2)$  imamo

$$x^2 + x - 5 \leq 0,$$

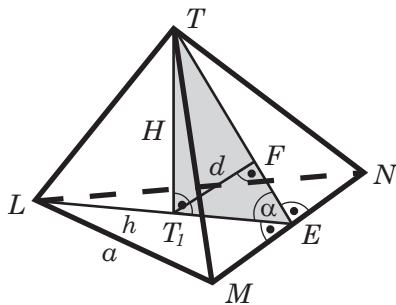
odakle je  $x \in (-2, (-1 + \sqrt{21})/2]$ .

Rešenje polazne nejednačine je  $x \in (-\infty, (-1 + \sqrt{21})/2] \cup [(1 + \sqrt{13})/2, +\infty)$ .

**14.4.** Kako je  $\sin \alpha = 3/5$ ,  $\sin \beta = 12/13$ ,  $\sin \gamma = 7/25$ , dobijamo da je  $\cos \alpha = 4/5$ ,  $\cos \beta = 5/13$ ,  $\cos \gamma = 24/25$ . Traženi rezultat dobijamo na osnovu jednakosti

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) - \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) \\ &= \cos \alpha (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) - \sin \alpha (\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta). \end{aligned}$$

**14.5.** Temena osnove su  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , a teme piramide je  $T$ . Kroz ivicu  $LT$  i visinu  $H = T_1T$  postavljena je ravan. Ova ravan je normalna na osnovu i seče osnovu duž težišne linije  $LE$  sa težištem  $T_1$ . Iz težišta je povučena normala  $T_1F$  na stranu  $MNT$  piramide. Tada je  $\alpha = \angle T_1ET$  i  $d = T_1F$ .



Iz pravouglog trougla  $T_1EF$  je

$$\frac{d}{T_1E} = \sin \alpha, \quad \frac{3}{T_1E} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad T_1E = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Težište deli težišnu liniju u odnosu

$$LT_1 : T_1E = 2 : 1,$$

odakle je

$$\frac{LT_1}{2\sqrt{3}} = 2, \quad LT_1 = 4\sqrt{3}, \quad LE = LT_1 + T_1E = 6\sqrt{3}.$$

Osnova piramide je jednakostranični trougao  $LMN$  jer je piramida pravila, pa se težišna linija i visina  $h$  trougla poklapaju, tj.

$$h = LE = 6\sqrt{3}.$$

Ako je  $a$  stranica trougla  $LMN$ , važi  $h = a\sqrt{3}/2$  i

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 12.$$

Zato je osnova

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$$

Iz pravouglog trougla  $T_1ET$  je

$$\frac{H}{T_1E} = \tan \alpha, \quad \frac{H}{2\sqrt{3}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

i za visinu piramide se dobija

$$H = 6,$$

a za zapreminu

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 6}{3} = 72\sqrt{3}.$$

**14.6.** Pretpostavimo suprotno, da je dati broj racionalan. Tada postoje prirodni brojevi  $p$  i  $q$  tako da je

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{p}{q}.$$

Nakon kvadriranja izraza

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{p}{q} - \sqrt{3},$$

dobijamo

$$5 + 2\sqrt{10} + 2 = \frac{p^2}{q^2} + 3 - \frac{2p}{q}\sqrt{3},$$

tj.

$$\sqrt{10} + \frac{p}{q}\sqrt{3} = \frac{p^2}{2q^2} - 2.$$

Kako je na desnoj strani jednakosti racionalan broj, sledi da postoje prirodni brojevi  $p_1$  i  $q_1$  tako da je

$$\sqrt{10} + \frac{p}{q}\sqrt{3} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo da je

$$\sqrt{30} = \frac{q}{2p} \left( \frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{3p^2}{q^2} - 10 \right),$$

te zaključujemo da je  $\sqrt{30}$  racionalan broj. Međutim to nije tačno, on je iracionalan broj. Pretpostavka da je dati broj racionalan je bila pogrešna, što znači da je on iracionalan broj.

## Test 15

- 15.1.** Vrednost izraza je 700.
- 15.2.** Diskriminanta date kvadratne jednačine je  $D = 16(m - 2)$ .
- a)** Rešenja kvadratne jednačine su realna ako je  $D \geq 0$ , odakle je  $m \geq 2$ . Iz Vietovih formula sledi  $x_1 + x_2 = 2(2 + m)$ .
- b)** Rešenja su dvostruka za  $m = 2$ .
- 15.3.** Nejednačina je definisana za  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$  i ekvivalenta je sa

$$-3 < \frac{2x - 7}{x - 3} < 3.$$

Rešavajući nejednačinu

$$\frac{2x - 7}{x - 3} - 3 < 0,$$

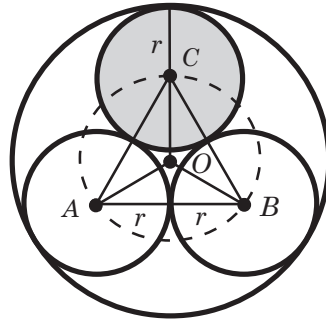
dobijamo da je  $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ . S druge strane, rešenje nejednačine

$$\frac{2x - 7}{x - 3} + 3 > 0$$

je  $x \in (-\infty, 3) \cup (16/5, +\infty)$ . Konačno, rešenje polazne nejednačine je  $x \in (-\infty, 2) \cup (16/5, +\infty)$ .

**15.4.** Rešenje je:  $\sin \alpha = 3/5$ ,  $\cos \alpha = -4/5$ ,  $\tan \alpha = -3/4$  i  $\cot \alpha = -4/3$ .

**15.5.** Neka su  $O, A, B, C$  centri kruga poluprečnika  $R$  i u njega upisanih krugova, a  $r$  poluprečnik upisanih krugova.



Trougao  $ABC$  je jednakostranični jer su njegove stranice međusobno jednake

$$AB = BC = CA = 2r = a.$$

Takođe je

$$OA = OB = OC = R - r = R_1,$$

pa je  $R_1$  poluprečnik kružnice opisane oko trougla  $ABC$ . Kako za jednakostranični trougao važi

$$R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

to je

$$R - r = \frac{2r\sqrt{3}}{3},$$

odakle je

$$R = r + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}r, \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}R.$$

Površina jednog upisanog kruga je

$$P = r^2 \pi = \frac{3}{(2 + \sqrt{3})^2} R^2 \pi = \frac{3}{7 + 4\sqrt{3}} R^2 \pi = 3(7 - 4\sqrt{3}) R^2 \pi.$$

**15.6.** Na jednog nastavnika ( $N$ ) dolazi 8 dečaka ( $M$ ), a na tih 8 dečaka 10 devojčica ( $D$ ). Sada imamo proporciju

$$N : M : D = 1 : 8 : 10 \Leftrightarrow N = k, M = 8k, D = 10k.$$

Kako je  $19k = 760$ , tj.  $k = 40$ , u školi ima  $N = 40$  nastavnika, što predstavlja oko 5.3%,  $M = 320$  dečaka, što predstavlja oko 42.1% i  $D = 400$  devojčica, što je oko 52.6%.

## Test 16

**16.1.** Vrednost izraza je 1.

**16.2.** Za  $x \geq 1/3$  kvadriranjem jednačine dobijamo

$$\frac{1}{x+1} + x + 1 + 2 = 3x - 1,$$

$$\frac{1}{x+1} + 6 - 2(x+1) = 0.$$

Poslednju jednačinu rešavamo uvodeći smenu  $x+1 = t$ ,  $t \geq 4/3$ . Sada dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2 - 6t - 1 = 0,$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

Uzimajući u obzir uslov  $t \geq 4/3$ , imamo samo  $t = (3 + \sqrt{11})/2$ , pa je rešenje polazne jednačine

$$x = \frac{1 + \sqrt{11}}{2}.$$

**16.3.** Nejednačinu zapisujemo u ekvivalentnom obliku

$$3^x \left( 3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{3}{2}} \right) \leq 4^x \cdot 2^{-1} + 4^x.$$

Dalje imamo

$$4^x \cdot \frac{3}{2} \geq 3^x \left( \frac{9-1}{3\sqrt{3}} \right), \quad \left( \frac{4}{3} \right)^x \geq \frac{4^2}{3^{5/2}},$$

$$x(\log_3 4 - 1) \geq 2 \log_3 4 - \frac{5}{2}, \quad x \geq \frac{4 \log_3 2 - \frac{5}{2}}{2 \log_3 2 - 1}.$$

**16.4.** Kako je

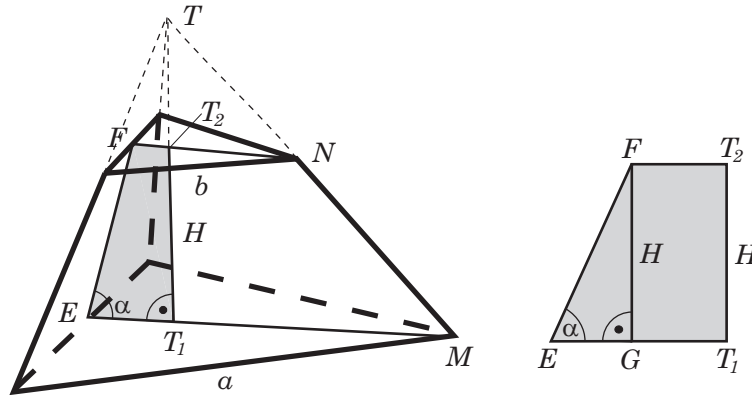
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 1,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = 2,$$



sabiranjem jednačina dobijamo da je  $\cos(\alpha - \beta) = 1/2$ .

- 16.5.** Pravilna zarubljena piramida nastaje iz pravilne osnovne piramide, pa su njene baze jednakostranični trouglovi, a ivice su jednake. Prikazana je na prvoj slici. Na istoj slici su  $h_1 = EM$ ,  $h_2 = FN$  visine baza,  $H = T_1T_2$  visina zarubljene piramide koja leži na visini  $T_1T$  osnovne piramide i  $\alpha = \angle T_1EF$ . Na drugoj slici je izdvojen četvorougao  $ET_1T_2F$  sa prve slike.



Neka je  $B_1$  veća, a  $B_2$  manja baza. Tada je

$$B_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}, \quad B_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Visine baza su

$$h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \quad h_2 = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Težišta  $T_1$ ,  $T_2$  dele visine  $h_1$ ,  $h_2$  u odnosu

$$ET_1 : T_1M = 1 : 2, \quad FT_2 : T_2N = 1 : 2,$$

odakle je

$$\begin{aligned} T_1M &= 2ET_1, & h_1 &= T_1M + ET_1 = 3ET_1, & ET_1 &= \frac{h_1}{3} = \sqrt{3}, \\ T_2N &= 2FT_2, & h_2 &= T_2N + FT_2 = 3FT_2, & FT_2 &= \frac{h_2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Baze zarubljene piramide su paralelne, pa je četvorougao  $ET_1T_2F$  trapez sa osnovicama  $ET_1 = \sqrt{3}$  i  $FT_2 = \sqrt{3}/3$ . Sa druge slike uočavamo da je

$$EG = ET_1 - FT_2 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{H}{EG} = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

i za visinu se dobija

$$H = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2.$$

Kako je  $B_1 B_2 = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27$ , zapremina je

$$V = \frac{(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) H}{3} = \frac{(9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}) \cdot 2}{3} = \frac{26\sqrt{3}}{3}.$$

**16.6. Prvi način.** Za  $z \neq i$  dobijamo da je

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1,$$

te se smenom

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

jednačina svodi na jednačinu

$$w^4 = 1.$$

Kako je polazna jednačina trećeg stepena, imamo da je

$$w_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

pa je

$$\frac{z_k+i}{z_k-i} = e^{i\frac{k\pi}{2}}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} z_k &= i \frac{e^{i\frac{k\pi}{2}} + 1}{e^{i\frac{k\pi}{2}} - 1} = i \frac{e^{i\frac{k\pi}{4}} \left( e^{i\frac{k\pi}{4}} + e^{-i\frac{k\pi}{4}} \right)}{e^{i\frac{k\pi}{4}} \left( e^{i\frac{k\pi}{4}} - e^{-i\frac{k\pi}{4}} \right)} \\ &= \frac{\cos \frac{k\pi}{4}}{\sin \frac{k\pi}{4}} = \cot \frac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

**Drugi način.** Nakon dizanja na četvrti stepen jednačina se svodi na jednačinu

$$z^3 - z = 0,$$

čija su rešenja

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1.$$

## Test 17

**17.1.** Vrednost izraza je  $\frac{4}{3}$ .

**17.2.** Imamo redom

$$\begin{aligned} 2^{5x+1} - 32^{x-1} + 5 \cdot 64^{\frac{5x+1}{6}} &= 383, \\ 2^{5x-5} \cdot 2^6 - 2^{5x-5} + 5 \cdot 2^{5x-5} \cdot 2^6 &= 383, \\ 2^{5x-5} (6 \cdot 2^6 - 1) &= 383. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo  $2^{5x-5} = 1$ , odakle je  $x = 1$ .

**17.3.** Posmatraćemo dva slučaja.

1° Za  $x \geq 0$  dobijamo nejednačinu

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + x > 0,$$

koja važi za svako  $x \in [0, +\infty)$ .

2° Za  $x < 0$  data nejednačina postaje

$$\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x > 0.$$

Iz uslova  $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ , a imajući u vidu uslov  $x < 0$ , dobijamo  $x \in (-\infty, 0)$ .

Kvadriranjem poslednje nejednačine sledi

$$x^2 - 3x + 1 > x^2,$$

odakle je  $x < 1/3$ , pa je rešenje u ovom slučaju  $x \in (-\infty, 0)$ .

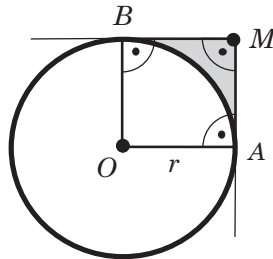
Dakle, nejednakost

$$\sqrt{x^2 - 2x + |x| + 1} + x > 0$$

važi za svako  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

**17.4.** Rezultat je  $\tan \alpha = (2 - \sqrt{2})/2$ ,  $\tan \beta = (2 + \sqrt{2})/2$ .

**17.5.** Ugao pod kojim se krug vidi iz tačke  $M$  je ugao između tangenata na krug koje prolaze kroz tačku  $M$ . Dodirne tačke tangenata i kruga označimo sa  $A$  i  $B$ , a centar kruga sa  $O$ .



Poluprečnik kruga koji ima zajedničku tačku sa tangentom je normalan na tangentu, pa četvorougao  $OAMB$  ima tri prava ugla, kod temena  $A$ ,  $M$  i  $B$ . Zato je i ugao kod temena  $O$  prav, što znači da je četvorougao  $OAMB$  kvadrat. Stranica kvadrata  $OAMB$  je poluprečnik kruga  $r$  i površina kvadrata iznosi

$$P_1 = r^2.$$

Površina  $P_2$  kružnog isečka, koji je unutar kvadrata  $OAMB$ , je četvrtina površine kruga, pa je

$$P_2 = \frac{1}{4}r^2\pi.$$

Tražena površina je sada

$$P = P_1 - P_2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2\pi = \frac{4 - \pi}{4}r^2.$$

- 17.6.** Velika kazaljka opiše ugao  $x$ , a mala  $x/12$  jer se 12 puta sporije kreće. Zbir ova dva ugla je pun krug, što odgovara vremenu od 60 minuta. Vremenski izraženo, to je

$$x + \frac{x}{12} = 60 \text{ minuta,}$$

odakle je  $x = \frac{720}{13}$  minuta.

Pretpostavimo da je Nemanja počeo sa radom u 12 časova i  $y$  minuta. Vremenska razlika između kazaljki je tada  $\frac{11}{12}y$ , a to je  $\frac{1}{13}$  punog kruga (60 minuta), pa je

$$\frac{11}{12}y = \frac{1}{13} \cdot 60.$$

Odavde je  $y = \frac{720}{143}$  minuta. Dakle, Nemanja je počeo sa radom u 12 časova i  $\frac{720}{143}$  minuta, a završio u 12 časova i  $y + x = \frac{720}{143} + \frac{720}{13} = \frac{8640}{143}$  minuta, tj. u 13 časova i  $\frac{60}{143}$  minuta.

## Test 18

- 18.1.** Vrednost datog izraza je 5.

- 18.2.** Zadatak ima smisla za  $x \geq 2$ . Uvođenjem smene

$$2^{\sqrt{x-2}} = t > 0$$

dobijamo kvadratnu jednačinu  $t^2 - t - 12 = 0$ , čija su rešenja  $t_1 = 4$  i  $t_2 = -3$ , od kojih, zbog uslova  $t > 0$ , važi samo prvo. Za  $t = 4$  dobijamo

$$2^{\sqrt{x-2}} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

**18.3.** Kako je desna strana nejednačine jednaka

$$x(1 - \log_{10} 2) = x(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = x \log_{10} 5 = \log_{10} 5^x,$$

to je nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$5^x + x - 20 > 5^x \Leftrightarrow x > 20.$$

**18.4.** Zadatak rešavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sqrt{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \\ (\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha) + (\sin \beta - \sqrt{3} \cos \beta) + (\sin \gamma - \sqrt{3} \cos \gamma) &= 0, \\ \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( \beta - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) &= 0, \\ 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) &= 0, \\ \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) &= 0, \\ \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right) &= 0, \\ \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6} \right) &= 0, \\ \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \vee \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \vee \sin \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Iz uslova  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  dobijamo

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{6} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{6} < \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3},$$

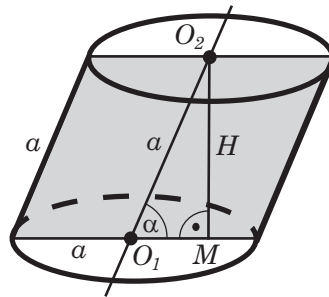
pa dalje sledi

$$\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \vee \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \vee \quad \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{6} = 0,$$

odnosno

$$\gamma = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

**18.5.** Na sledećoj slici je prikazan opisani valjak sa centrima baza  $O_1, O_2$  i visinom  $H = MO_2$ . Osni presek je osenčen.



Poluprečnik osnove je  $R = a/2$  i za osnovu se dobija

$$B = R^2 \pi = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Izvodnica valjka je stranica romba  $a$ . Osa je paralelna izvodnicama, pa je  $O_1O_2 = a$  i iz pravouglog trougla  $O_1MO_2$  sledi  $H/a = \sin \alpha = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ , odakle je

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tražena zapremina je

$$V = BH = \frac{a^2 \pi}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{8}.$$

### 18.6. Uvođenjem smene

$$t = 1 - 5x^2,$$

dobijamo

$$x = 1 - 5t^2.$$

Oduzimanjem ove dve jednakosti dobijamo  $t - x = 5(t^2 - x^2)$ , odnosno

$$(t - x)(1 - 5(t + x)) = 0.$$

Odavde sledi da je

$$t = x \quad \text{ili} \quad t = \frac{1}{5} - x.$$

Iz sistema

$$\begin{aligned} t &= 1 - 5x^2, \\ t &= x, \end{aligned}$$

dobijamo kvadratnu jednačinu  $5x^2 + x - 1 = 0$ , čija su rešenja

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{10}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{10}.$$

Iz sistema

$$\begin{aligned} t &= 1 - 5x^2, \\ t &= \frac{1}{5} - x, \end{aligned}$$

dobijamo kvadratnu jednačinu  $5x^2 - x - 4/5 = 0$ , čija su rešenja

$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{10}, \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{17}}{10}.$$

## Test 19

**19.1.** Vrednost izraza je 1.

**19.2.** Oblast definisanosti jednačine je  $x \geq 8/3$ . Kvadriranjem se dobija

$$x - 3 + \sqrt{(3x - 8)(x - 1)} = 0,$$

odakle je

$$\sqrt{(3x - 8)(x - 1)} = -(x - 3).$$

Uz dodatni uslov  $x \leq 3$ , ponovnim kvadriranjem dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2x^2 - 5x - 1 = 0,$$

koju posmatramo samo za  $x \in [8/3, 3]$ . U ovom segmentu jednačina ima jedno rešenje

$$x = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}.$$

**19.3.** Za  $x > 0$  uvodeći smenu  $t = \log_3 x$  dobija se nejednačina

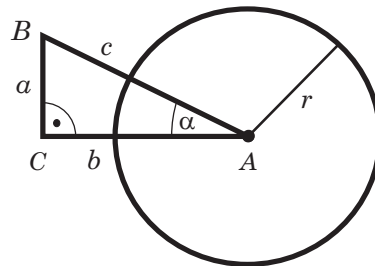
$$t^2 - t - 2 \leq 0,$$

čije je rešenje  $t \in [-1, 2]$ , pa je rešenje polazne nejednačine  $x \in [1/3, 9]$ .

**19.4.** Kako je  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , koristeći trigonometrijske identitete dobijamo

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \\ &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ &= 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

**19.5.** Katete trougla  $ABC$  označimo sa  $a = BC$  i  $b = AC$ , a poluprečnik kružnice sa  $r$ .



Kako je

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

i  $\sin \alpha = \sin 30^\circ = 1/2$ ,  $\cos \alpha = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ , to je

$$a = c \sin \alpha = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad b = c \cos \alpha = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

pa je površina pravouglog trougla  $ABC$

$$P_1 = \frac{ab}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Za površinu  $P_2$  kružnog isečka, koji se nalazi unutar trougla  $ABC$ , važi

$$P_2 = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \alpha = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{r^2 \pi}{12}.$$

Prema uslovu zadatka je

$$P_1 = P_2 + P_2,$$

odakle je

$$\frac{r^2 \pi}{12} = 2\sqrt{3} - \frac{r^2 \pi}{12}, \quad \frac{r^2 \pi}{6} = 2\sqrt{3}, \quad r^2 = \frac{12\sqrt{3}}{\pi}$$

i za poluprečnik se dobija

$$r = 2\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}.$$

**19.6.** Zamenom  $z = x + iy$  u datoj jednačini dobija se sistem

$$\begin{aligned} x(x^2 - 3y^2 - 1) &= 0, \\ y(3x^2 - y^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = i, \quad z_5 = -i.$$

## Test 20

**20.1.** Rešenje je  $x = \frac{6}{11}$ .

**20.2. a)** Diskriminanta date kvadratne jednačine je

$$D = 17m^2 - 6m - 11.$$



Rešenja su realna ako je  $D \geq 0$ , odakle dobijamo  $m \in (-\infty, -11/17] \cup [1, +\infty)$ .

b) Kako je

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 - m, \\x_1 x_2 &= 3 + m - 4m^2,\end{aligned}$$

to je

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{9m + 5}{(m - 1)(4m + 3)^2}, \quad m \neq 1, \quad m \neq -\frac{3}{4}.$$

Za  $m = 1$  je  $x_1 = x_2 = 0$ , te vrednost traženog izraza ne postoji. Za  $m = -3/4$  je  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 7/4$ , pa vrednost izraza, takođe, ne postoji.

**20.3.** Nejednačina ima smisla za  $x \neq 0$  i ekvivalentna je nejednačini

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2} \leq 0,$$

koja važi za  $x \in (0, 2]$ , što je i rešenje date nejednačine.

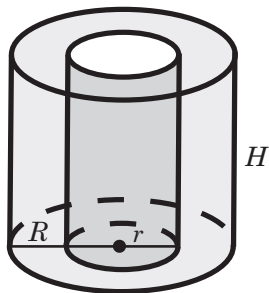
**20.4.** Data jednačina je definisana za  $\sin x \neq 0$ , tj. za  $x_k \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Transformacijom polazne jednačine sledi:

$$\begin{aligned}1 &= 10 \cos 2x \cos x \sin x, \\1 &= 5 \sin 2x \cos 2x, \\1 &= \frac{5}{2} \sin 4x.\end{aligned}$$

Dakle, rešenja su:

$$x_k = \frac{1}{4} \left( \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi \right), \quad x_k = \frac{1}{4} \left( \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**20.5.** Šuplji valjak je prikazan na sledećoj slici.



Baze i omotači većeg i manjeg valjka su:

$$B_1 = R^2\pi = 225\pi, \quad M_1 = 2R\pi H = 750\pi;$$

$$B_2 = r^2\pi = 36\pi, \quad M_2 = 2r\pi H = 300\pi.$$

Šuplji valjak se sastoji od dva kružna prstena

$$B = B_1 - B_2 = 225\pi - 36\pi = 189\pi,$$

spoljašnjeg omotača  $M_1$  i unutrašnjeg  $M_2$ , pa je njegova površina

$$P = 2B + M_1 + M_2 = 378\pi + 750\pi + 300\pi = 1428\pi.$$

**20.6.** Racionalizacijom datog izraza dobija se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{9}-1}{2} = 1. \end{aligned}$$

## Test 21

**21.1.** Rešenje je  $x = \frac{9}{4}$ .

**21.2.** Za  $x \neq 0$  jednačina može da se transformiše u jednakost

$$2^{x/2} \cdot 4^{x/6} \cdot \left( \left( \frac{1}{8} \right)^{1/x} \right)^{1/6} = 2^{5x/6-1/(2x)} = 2^2 \cdot 2^{1/3},$$

odakle se dobija  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -1/5$ .

**21.3.** Nejednačina je definisana za  $x \in [3, 8]$ . Uzastopnim kvadriranjem nejednačine dva puta dobijamo redom:

$$\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} \geq 3, \quad \sqrt{(8-x)(x-3)} \geq 2, \quad x^2 - 11x + 28 \leq 0,$$

odakle dobijamo rešenje date nejednačine  $x \in [4, 7]$ .

**21.4.** Jednačinu rešavamo na sledeći način:

$$\sin 9x - \sqrt{3} \cos 7x - \sin 5x = 0,$$

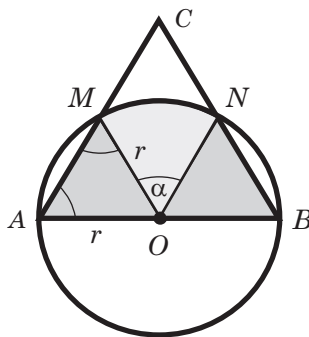
$$2 \sin 2x \cos 7x - \sqrt{3} \cos 7x = 0,$$

$$\cos 7x (2 \sin 2x - \sqrt{3}) = 0.$$

Rešenja su:

$$x_k = \frac{(2k+1)\pi}{14}, \quad x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**21.5.** Označimo sa  $O$  centar kruga, sa  $r$  njegov poluprečnik i sa  $M, N$  tačke u kojima krug seče trougao  $ABC$ .



Prema obrascu za površinu jednakostraničnog trougla, površina trougla  $ABC$  je

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Posmatramo trouglove  $OAM$  i  $OBN$ . Trougao  $OAM$  je jednakokraki jer je  $OA = OM = r$ , pa su uglovi na osnovici  $AM$  jednaki. Kako je  $\angle OAM = 60^\circ$  kao ugao jednakostraničnog trougla  $ABC$ , to je i  $\angle OMA = 60^\circ$ , a time i  $\angle AOM = 60^\circ$ . Dakle, trougao  $OAM$  je jednakostranični. Na isti način se utvrđuje da je i trougao  $OBN$  jednakostranični. Oba trougla imaju stranicu

$$r = \frac{a}{2} = \sqrt{6},$$

pa su njihove površine

$$P_2 = P_3 = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Kružnom isečku  $OMN$  između trouglova  $OAM$  i  $OBN$  odgovara centralni ugao  $\alpha = 60^\circ$  zbog  $\angle AOM + \alpha + \angle BON = 180^\circ$ . Zato je površina isečka

$$P_4 = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \alpha = \frac{6\pi}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \pi.$$

Deo trougla  $ABC$  unutar kruga je sastavljen od trouglova  $OAM$ ,  $OBN$  i kružnog isečka  $OMN$ , pa ima površinu

$$P_5 = P_2 + P_3 + P_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \pi = 3\sqrt{3} + \pi.$$

Površina dela trougla  $ABC$  van kruga je tada

$$P_6 = P_1 - P_5 = 6\sqrt{3} - (3\sqrt{3} + \pi) = 3\sqrt{3} - \pi.$$

**21.6.** Neka je Ana uložila u banku  $x$  dinara. Na osnovu uslova zadatka dobijamo jednačinu

$$25000 \cdot p\% + (x - 25000) \cdot (p + 2)\% = x \cdot (p + 0.4)\%,$$

odakle je  $x = 31250$  dinara.

## Test 22

**22.1.** Rešenje je  $x = \frac{1}{2}$ .

**22.2.** Dajemo uputstvo. Uvesti smenu  $x + 1 = t^2$  za  $x \geq -1$ ,  $x \neq 5/4$ . Rešenja su  $x_1 = 3$  i  $x_2 = 440$ .

**22.3.** Data nejednačina ima smisla pod uslovom  $x^2 - 7x + 10 > 0$ , tj. za  $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ . Njena rešenja odredićemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{9}\right)^{\log_{1/4}(x^2-7x+10)} < \frac{9}{4} &\Leftrightarrow \log_{1/4}(x^2-7x+10) > -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 6). \end{aligned}$$

Presek dobijenog intervala i uslova egzistencije nejednačine je  $x \in (1, 2) \cup (5, 6)$ .

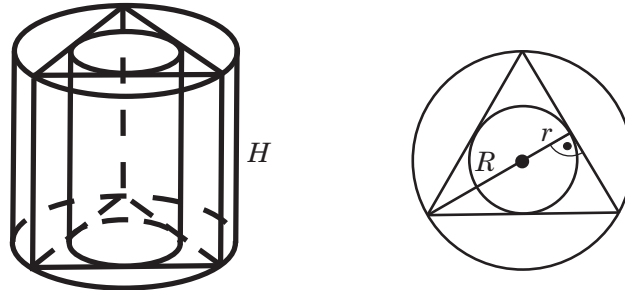
**22.4.** Imamo:

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{3} \cos 2x + \cos 3x &= 0, \\ 2 \cos x \cos 2x + \sqrt{3} \cos 2x &= 0, \\ 2 \cos 2x \left( \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja su:

$$x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad x_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_k = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**22.5.** Prva slika prikazuje prizmu i dva valjka visine  $H$ , a druga njihove baze, pri čemu je  $R$  poluprečnik baze spoljašnjeg, a  $r$  poluprečnik baze unutrašnjeg valjka.



Prizma je pravilna, što znači da je njena baza jednakostranični trougao. Baza  $B_1$  spoljašnjeg valjka je krug opisan oko trougla, a baza  $B_2$  unutrašnjeg valjka je krug upisan u trougao. Odnos poluprečnika ovih krugova kod jednakostraničnog trougla je  $R : r = 2 : 1$ , tj. važi

$$R = 2r.$$

Oba valjka imaju istu visinu  $H$ , pa je odnos njihovih zapremina

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{B_1 H}{B_2 H} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{R^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{4r^2 \pi}{r^2 \pi} = 4.$$

Dakle, zapremina  $V_1$  spoljašnjeg valjka je četiri puta veća od zapremine  $V_2$  unutrašnjeg valjka.

**22.6.** Zadatak se rešava slično kao i zadatak 19.6. Rezultat je

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

## Test 23

**23.1.** Vrednost izraza je 3.

**23.2.** Transformišimo jednačinu na sledeći način:

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_3 x + 1 &= \frac{1}{4} \log_2 x + 3 \log_3 x - \frac{1}{2}, \\ 16 \log_3 x - 3 \log_2 x &= 6, \\ 16 \log_3 x - 3 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2} &= 6, \\ \log_3 x \cdot \frac{16 \log_3 2 - 3}{\log_3 2} &= 6, \\ \log_3 x &= \frac{6 \log_3 2}{16 \log_3 2 - 3}. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednakosti je

$$x = 3^{\frac{6 \log_3 2}{16 \log_3 2 - 3}} = 2^{\frac{6}{16 \log_3 2 - 3}}.$$

**23.3.** Nejednačina je definisana za  $|x| \leq 1/2$  i  $x \neq 0$ . Za  $0 < x \leq 1/2$  dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$\sqrt{1 - 4x^2} < 1 - \frac{3}{2}x,$$

odakle, posle kvadriranja, dobijamo nejednačinu

$$\frac{25}{4}x^2 - 3x > 0,$$

čije je rešenje  $x > 12/25$ . Znači, u ovom slučaju, rešenje je  $12/25 < x \leq 1/2$ . Ako je  $-1/2 \leq x < 0$ , imamo nejednačinu

$$1 - \sqrt{1 - 4x^2} < \frac{3}{2}x,$$

koja nema rešenja u posmatranom intervalu.

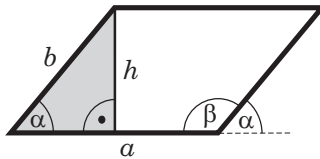
**23.4.** Datu jednačinu možemo da transformišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x) &= \sqrt{2} - 1, \\ 4 \sin x \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) &= \sqrt{2} - 1, \\ 4 \sin x \sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right) &= \sqrt{2} - 1, \\ 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right) - \cos \frac{\pi}{3} \right) &= \sqrt{2} - 1, \\ \cos \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Poslednja jednakost važi za

$$x_k = \frac{7\pi}{24} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{24} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**23.5.** Neka je  $\alpha$  oštar ugao paralelograma i  $h$  visina koja odgovara stranici  $a$ .



Za oštar i tup ugao paralelograma važi  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , pa je

$$\alpha = 30^\circ.$$

Trougao sa stranicama  $b$ ,  $h$  i uglom  $\alpha$  je pravougli. Zato je  $h/b = \sin \alpha = \sin 30^\circ = 1/2$ , odakle je

$$h = \frac{b}{2} = 3.$$

Površina paralelograma je

$$P = ah = 9 \cdot 3 = 27.$$

**23.6.** Primenom nejednakosti koje važe za kompleksne brojeve dobijamo

$$|3 + 2i - z| \geq ||3 + 2i| - |z|| \geq |\sqrt{13} - 1| = \sqrt{13} - 1.$$

## Test 24

**24.1.** Vrednost izraza je 1.

**24.2.** Diskriminanta jednačine je

$$D = 4(k^2 - 6k + 8) = 4(k - 2)(k - 4).$$

Za  $k \in (2, 4)$  jednačina nema rešenja u realnom domenu.

Za  $k \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$  jednačina ima realna rešenja

$$x_{1,2} = (4k - 1) \pm \sqrt{(k - 2)(k - 4)},$$

pri čemu su ta rešenja dvostruka za  $k = 2$ ,  $k = 4$ .

**24.3.** Iz uslova egzistencije

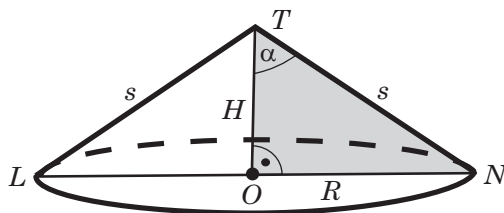
$$x \geq -\frac{1}{2}, \quad x \geq \frac{5}{2}, \quad x \leq \frac{5}{2}$$

vidimo da nejednačina ima jedinstveno rešenje  $x = 5/2$ .

**24.4.** Izraz ćemo uprostiti na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1}{3 + 4 \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1} \\ &= \frac{2(1 - \cos 2\alpha)^2}{2(1 + \cos 2\alpha)^2} = \tan^4 \alpha. \end{aligned}$$

- 24.5.** U pravoj kupi visina  $H$  leži na osi, izvodnice su jednake i sa visinom zaklapaju jednake uglove. Osni preseki su zato podudarni jednakokraki trouglovi sa osnovicom  $2R$ , krakom  $s$  i visinom  $H$ , gde je  $R$  poluprečnik baze kupe. Na sledećoj slici osni presek je trougao  $LNT$ , a  $O$  je centar baze.



Iz pravouglog trougla  $ONT$  je

$$\frac{H}{s} = \cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad s = 2H,$$

pa iz uslova  $s - H = 5$  sledi  $2H - H = 5$  i

$$H = 5, \quad s = 10.$$

Iz istog trougla je

$$\frac{R}{s} = \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odakle je

$$R = \frac{s\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Baza i omotač kupe su

$$B = R^2\pi = 75\pi, \quad M = R\pi s = 50\sqrt{3}\pi,$$

a površina i zapremina su

$$P = B + M = (75 + 50\sqrt{3})\pi, \quad V = \frac{BH}{3} = 125\pi.$$

- 24.6.** Neka prvi radnik može da završi posao za  $x$  dana, a drugi za  $y$  dana. Na osnovu uslova zadatka dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} &= 1, \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} + \frac{17.5}{y} &= 1, \end{aligned}$$

iz kojeg dobijamo  $x = 20$  dana,  $y = 30$  dana.



## Test 25

**25.1.** Rešenje je  $x = \frac{19}{3}$ .

**25.2.** Razmatraćemo dva slučaja.

1° Za  $x \geq 3$  dobijamo jednačinu

$$x^2 - 3x - 1 = 0,$$

čija su rešenja

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

S obzirom na uslov  $x \geq 3$ , prihvatamo samo rešenje  $x = (3 + \sqrt{13})/2$ .

2° Za  $x < 3$  imamo jednačinu

$$x^2 - 11x + 23 = 0,$$

čija su rešenja

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

S obzirom na uslov  $x < 3$ , prihvatamo samo rešenje  $x = (11 - \sqrt{29})/2$ .

**25.3.** Za  $x > 1$  i  $x \neq 2$ , data nejednačina postaje

$$\frac{(3-x)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\log_2(x-1)} > 0,$$

i njeno rešenje je  $x \in (2, 3)$ . Za  $x < 1$  i  $x \neq 0$ , data nejednačina postaje

$$\frac{(3-x)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\log_2(1-x)} > 0,$$

i tačna je za  $x \in (0, 1/2)$ .

Konačno, rešenje nejednačine je  $x \in (0, 1/2) \cup (2, 3)$ .

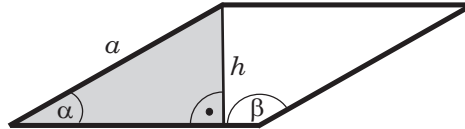
**25.4.** Datu jednačinu rešavamo na sledeći način

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{3} - \cos x - 4 \sin^3 \frac{x}{3} &= 0, \\ \cos \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} + \sin \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} &= 0, \\ \cos \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{3}\right) + 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} &= 0, \\ 4 \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} &= 0, \\ \sin^2 \frac{x}{3} \left(\cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3}\right) &= 0, \\ \sin^2 \frac{x}{3} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja su:

$$x_k = 3k\pi, \quad x_k = \frac{3(4k+1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**25.5.** Sa  $a$ ,  $h$  označavamo stranicu i visinu, sa  $d_1$ ,  $d_2$  dijagonale i sa  $\alpha$  oštar ugao romba.



Iz izraza za površinu romba

$$P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$$

i pretpostavke zadatka  $a = \sqrt{d_1 d_2}$  sledi

$$a^2 = d_1 d_2 = 2ah, \quad a = 2h.$$

Trougao sa stranicama  $a$ ,  $h$  i uglom  $\alpha$  je pravougli, pa dalje sledi

$$\sin \alpha = \frac{h}{a} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Ako je  $\beta$  tup ugao romba, važi  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , odakle je  $\beta = 150^\circ$ .

Zaključujemo da su različiti uglovi romba

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 150^\circ.$$

**25.6.** Vrednost izraza računamo na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}} &= \frac{3\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ &= \frac{2 + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10 + \sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

## Test 26

**26.1.** Vrednost izraza je  $\frac{103}{8}$ .

**26.2.** Oblast definisanosti jednačine se dobija iz uslova  $x - 1 > 0$ ,  $4 - x > 0$ ,  $x > 0$  i to je  $x \in (1, 4)$ .

Transformišemo jednačinu u

$$\left| \log \frac{(x-1)(4-x)}{x} \right| = \left| \log \frac{x}{2} \right|,$$

odakle je

$$\log \frac{(x-1)(4-x)}{x} = \log \frac{x}{2} \quad \text{ili} \quad \log \frac{(x-1)(4-x)}{x} = -\log \frac{x}{2}.$$

U prvom slučaju je

$$\frac{(x-1)(4-x)}{x} = \frac{x}{2},$$

pa je  $3x^2 - 10x + 8 = 0$  i  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4/3$ . U drugom slučaju je

$$\frac{(x-1)(4-x)}{x} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{x},$$

pa je  $x^2 - 5x + 6 = 0$  i  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 2$ .

Kako je  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (1, 4)$ , jednačina ima tri rešenja

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4/3, \quad x_3 = 3.$$

**26.3.** Nejednačina je definisana za one realne vrednosti promenljive  $x$  za koje je

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0,$$

a to je ispunjeno za  $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ . Primitimo da za  $x \geq 3$  važi

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0, \quad 2 - x \leq 0,$$

pa je data nejednačina zadovoljena za svako  $x \geq 3$ . Za  $x \leq 1$  je  $2 - x > 0$ , pa kvadriranjem nejednačine dobijamo

$$x^2 - 4x + 3 \geq 4 - 4x + x^2,$$

odnosno  $3 \geq 4$ , što je nemoguće, pa u ovom slučaju nejednačina nema rešenja.

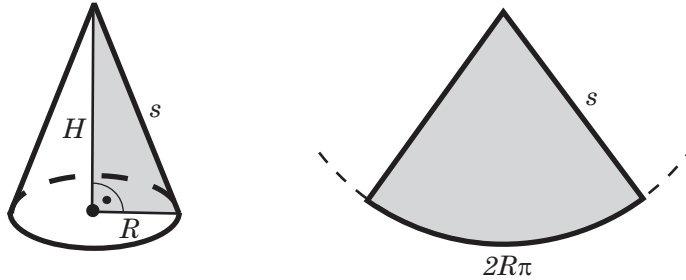
**26.4.** Dobijamo

$$\begin{aligned} \sin \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{3} - \cos 2x &= 0, \\ \sin \frac{5x}{6} + 2 \sin \frac{7x}{6} \sin \frac{5x}{6} &= 0, \\ \sin \frac{5x}{6} \left( 1 + 2 \sin \frac{7x}{6} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja su:

$$x_k = \frac{6}{5}k\pi, \quad x_k = \frac{6}{7} \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), \quad x_k = \frac{6}{7} \left( \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 26.5.** Na prvoj slici je prikazana prava kupa sa visinom  $H$ , izvodnicom  $s$  i poluprečnikom osnove  $R$ . Druga slika prikazuje omotač  $M$  u razvijenom obliku.



Kako je  $B = R^2\pi = 7\pi$ , poluprečnik osnove je

$$R = \sqrt{7}.$$

Krug, čija je osmina omotač  $M$ , ima za poluprečnik izvodnicu  $s$ , a time i površinu  $s^2\pi$ . Zato je  $M = s^2\pi/8$  i iz formule  $M = R\pi s$  sledi

$$R\pi s = \frac{s^2\pi}{8}, \quad \sqrt{7} = \frac{s}{8},$$

odakle je izvodnica

$$s = 8\sqrt{7}.$$

Dalje, prema Pitagorinoj teoremi, iz osenčenog trougla sa prve slike se dobija

$$H^2 = s^2 - R^2 = 64 \cdot 7 - 7 = (64 - 1) \cdot 7 = 63 \cdot 7 = 9 \cdot 7^2 = 21^2,$$

pa je visina

$$H = 21.$$

Na osnovu dobijenih podataka, omotač kupe je

$$M = R\pi s = 56\pi,$$

a površina i zapremina su

$$P = B + M = 7\pi + 56\pi = 63\pi, \quad V = \frac{BH}{3} = 49\pi.$$

**26.6.** Jednačina je kvadratna za  $k \neq 0$ . Diskriminanta ove jednačine je  $D = 1 + 4k$ . Da bi rešenja bila racionalna, neophodno je da bude  $D = t^2$ , za neko  $t \in \mathbb{Z}$ , odakle dobijamo

$$k = \frac{t^2 - 1}{4}, \quad t \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}.$$

Dalje, uslov  $k \in \mathbb{Z}$  je ispunjen ako je  $t^2 - 1$  deljivo sa 4, a to važi ako je  $t$  neparan broj,  $t = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ . Konačno dobijamo

$$k = \frac{(2l + 1)^2 - 1}{4} = l^2 + l, \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}.$$

## Test 27

**27.1.** Vrednost izraza je 3.

**27.2.** Jednačina ima smisla za  $x \geq 0$ . Dalje imamo

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} = 1 \\ \Leftrightarrow & 2 + \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \left( \sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} \right) = 1 \\ \Rightarrow & 4 + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{4 - x} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5. \end{aligned}$$

Proverom se dobija da  $x = 5$  jeste rešenje.

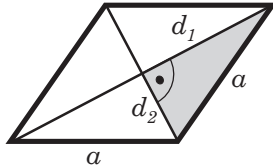
**27.3.** Nejednačina je definisana za  $x > 0$  i ekvivalentna je sa

$$\frac{x(x + 6)}{49} \leq 1.$$

**27.4.** Važi sledeće:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sin^2 x - \cos^2 x} + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x}}{\sin^2 x - \cos^2 x} + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x + \cos x} + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

**27.5.** Neka je  $a$  stranica romba, a  $d_1$  i  $d_2$  njegove dijagonale.



Dijagonale romba su uzajamno normalne i polove se. One dele romb na četiri podudarna pravouglata trougla, čije su katete  $d_1/2$  i  $d_2/2$ , a hipotenuza je stranica  $a$  (pravilo podudarnosti SSS). Zato je, prema Pitagorinoj teoremi,  $(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2 = a^2$ , tj.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Kako je površina romba  $P = d_1 d_2 / 2 = 7$ , to je

$$d_1 d_2 = 14.$$

Dalje, iz  $d_1 + d_2 = 8$  sledi

$$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = 64,$$

pa je

$$d_1^2 + d_2^2 = 64 - 2d_1 d_2 = 64 - 28 = 36.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je

$$4a^2 = 36, \quad a = 3$$

i za obim romba se dobija

$$O = 4a = 12.$$

**27.6.** Rešenje je

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}} = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} (\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}) (4 + 2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3}).$$

## Test 28

**28.1.** Vrednost izraza je  $-1$ .

**28.2.** Koreni date kvadratne jednačine su

$$x_{1,2} = \frac{(2 - m) \pm \sqrt{(m - 14)(m - 6)}}{8}.$$

Za  $m \in (6, 14)$  jednačina nema realna rešenja.  
 Ima realna rešenja za  $m \in (-\infty, 6] \cup [14, +\infty)$ .  
 Za  $m = 6$  ili  $m = 14$  imamo dvostruka rešenja.

**28.3.** Imamo da je

$$\begin{aligned} 0.3^{2x^2-3x+6} < 0.00243 &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-3x+6} < \left(\frac{3}{10}\right)^5 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 6 > 5 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

**28.4. a)** Kako je  $\sin \alpha \cos \alpha = 2/5$ ,  $\alpha \in (0, \pi/4)$ , na osnovu jednakosti

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

dobija se  $\sin \alpha + \cos \alpha = 3\sqrt{5}/5$ .

**b)** Takođe, kako za  $\alpha \in (0, \pi/4)$  važi  $\cos \alpha > \sin \alpha$ , na osnovu jednakosti

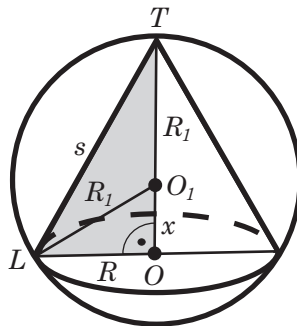
$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

dobija se da je  $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{5}/5$ , tj.  $\sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{5}/5$ .

**c)** Na osnovu prethodnih rezultata, imamo da je  $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$  i  $\cos \alpha = 2\sqrt{5}/5$ .  
 Sada je

$$\sin^{2m} \alpha + \cos^{2m} \alpha = (\sin^2 \alpha)^m + (\cos^2 \alpha)^m = \left(\frac{1}{5}\right)^m + \left(\frac{4}{5}\right)^m = \frac{1+4^m}{5^m}.$$

**28.5.** Neka su  $O$ ,  $R$  centar i poluprečnik baze prave kupe, a  $O_1$ ,  $R_1$  centar i poluprečnik opisane lopte. Još, neka je  $T$  teme kupe i  $L$  još jedna zajednička tačka kupe i lopte. Tada je  $OT = H$  visina kupe i  $O_1O = x$  rastojanje između centara  $O_1$ ,  $O$ .



Prema uslovu zadatka i uvedenim oznakama je

$$H = 2R, \quad H = x + R_1 = x + 8,$$

pa je  $2R = x + 8$ , tj.

$$x = 2R - 8.$$

Na osnovu Pitagorine teoreme iz pravouglog trougla  $OLO_1$  sledi

$$R^2 + x^2 = R_1^2 = 64$$

i dalje

$$R^2 + (2R - 8)^2 = 64, \quad 5R^2 - 32R = 0, \quad 5R - 32 = 0.$$

Zato je

$$R = \frac{32}{5}, \quad x = 2R - 8 = \frac{24}{5}, \quad H = x + 8 = \frac{64}{5}.$$

Izvodnicu  $s$  kupe određujemo iz pravouglog trougla  $OLT$  i dobijamo

$$s^2 = R^2 + H^2 = \frac{32^2}{25} + \frac{64^2}{25} = \frac{32^2 + 4 \cdot 32^2}{25} = \frac{32^2}{5},$$

odakle je

$$s = \frac{32}{\sqrt{5}} = \frac{32}{5}\sqrt{5}.$$

Sada su baza i omotač kupe

$$B = R^2\pi = \left(\frac{32}{5}\right)^2 \pi, \quad M = R\pi s = \left(\frac{32}{5}\right)^2 \sqrt{5}\pi,$$

a površina i zapremina

$$P = B + M = \left(\frac{32}{5}\right)^2 (1 + \sqrt{5}) \pi,$$

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{32}{5}\right)^2 \pi \cdot \frac{2 \cdot 32}{5} = \frac{2}{3} \left(\frac{32}{5}\right)^3 \pi.$$

- 28.6.** Označimo sa  $x$  broj minuta za koliko je prošlo 8 sati u prvom slučaju. Dok velika kazaljka prođe ceo krug, mala prođe dvanaesti deo, a to je podeok koji odgovara petoj minuti. Mala kazaljka startuje sa broja 8, tj. sa četrdesetog podeoka, a velika sa broja 12, tj. sa početnog položaja. U momentu poklapanja kazaljki važiće jednakost

$$40 + \frac{x}{12} = x.$$

Odavde je  $x = 480/11$ .

U drugom slučaju položaji kazaljki razlikuju se za 30 podeljaka, pa ako označimo sa  $y$  broj minuta za koliko je prošlo 2 sata, imamo jednačinu

$$10 + \frac{y}{12} = y - 30,$$



gde  $y$  označava broj minuta posle 2 sata, kada kazaljke grade ispružen ugao. Odavde je  $y = 480/11$ . Dakle,  $x = y$ , pa je od polaska u školu do povratka prošlo tačno 6 sati.

## Test 29

**29.1.** Vrednost izraza je 1.

**29.2.** Jednačina je definisana za  $m > 1$  i  $x \in (-3, 1)$ . Napišimo jednačinu u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned}\log_4(3+x) + \log_4(1-x) &= \log_4 4 + \log_4 \log_2 m, \\ \log_4(3-2x-x^2) &= \log_4 4 \log_2 m.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 + 2x - 3 + 4 \log_2 m = 0,$$

čija su rešenja

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16(1 - \log_2 m)}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{\log_2 2m^{-1}}.$$

Iz uslova  $\log_2 2m^{-1} \geq 0$  sledi  $2m^{-1} \geq 1$ , tj.  $m \leq 2$ . Sada imamo sledeće zaključke.

Jednačina ima realna rešenja za  $m \in (1, 2]$ .

Za jedinu celobrojnu vrednost parametra  $m$ ,  $m = 2$ , rešenje je  $x = -1$ .

**29.3.** Nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$\frac{2x^2 + 6x + 9}{(x-3)(x+2)(x+3)} \leq 0,$$

odakle je  $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$ .

**29.4.** Rešenja su:

$$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \quad x_k = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**29.5.** Ako je  $d_1$  veća, a  $d_2$  manja dijagonala, na osnovu uslova zadatka sledi

$$d_1 + d_2 = 14, \quad d_2 = \frac{3}{4}d_1,$$

pa je  $d_1 + 3d_1/4 = 14$ , odakle je

$$d_1 = 8, \quad d_2 = 6.$$

Kako je  $a^2 = (d_1/2)^2 + (d_2/2)^2 = 16 + 9 = 25$ , to je

$$a = 5.$$

Za površinu romba važi  $P = ah = d_1d_2/2$ , pa je visina romba

$$h = \frac{d_1d_2}{2a} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$

Poluprečnik kružnice upisane u romb je

$$r = \frac{h}{2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}.$$

**29.6.** Kako je  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,  $\sqrt{7} - 1 > 0$  i  $2\sqrt{7} - 6 < 0$ , sledi

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} &= 2\sqrt{1 - 2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} \\ &= 2\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} + \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} \\ &= 2 \cdot |\sqrt{7} - 1| + |2\sqrt{7} - 6| \\ &= 2 \cdot (\sqrt{7} - 1) + (6 - 2\sqrt{7}) = 4, \end{aligned}$$

tj. ovaj broj je racionalan.

### Test 30

**30.1.** Računamo vrednost izraza:

$$\begin{aligned} &3\frac{5}{14} - \left(1\frac{11}{49} : \left(76 \cdot \frac{25}{38} - 47\frac{3}{7}\right)\right) \cdot \frac{12}{55} \\ &= \frac{47}{14} - \left(\frac{60}{49} : \left(50 - \frac{332}{7}\right)\right) \cdot \frac{12}{55} \\ &= \frac{47}{14} - \left(\frac{60}{49} : \frac{18}{7}\right) \cdot \frac{12}{55} \\ &= \frac{47}{14} - \left(\frac{60}{49} \cdot \frac{7}{18}\right) \cdot \frac{12}{55} \\ &= \frac{47}{14} - \frac{10}{21} \cdot \frac{12}{55} = \frac{47}{14} - \frac{8}{77} = \frac{501}{154}. \end{aligned}$$

**30.2.** Na osnovu Vietovih formula je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{3}{4}, \\ x_1x_2 &= \frac{9k^2}{8}. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova zadatka je, recimo,  $x_1 = x_2^2$ . Sada iz prve jednakosti dobijamo

$$x_2^2 + x_2 - \frac{3}{4} = 0,$$

odakle je  $x_2 = -3/2$  ili  $x_2 = 1/2$ .

Za  $x_2 = -3/2$  je  $x_1 = 9/4$ , pa iz jednakosti  $x_1 x_2 = 9k^2/8$  sledi  $9/4 \cdot (-3/2) = 9k^2/8$ , što je nemoguće.

Za  $x_2 = 1/2$  je  $x_1 = 1/4$ , pa imamo  $x_1 x_2 = 1/8 = 9k^2/8$ , odakle je  $k = 1/3$ .

**30.3.** Rešenje nejednačine je  $x \in (-\infty, -17/8] \cup [-3/2, +\infty)$ .

**30.4.** Za  $x \neq (2k+1)\pi/2$  i  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sledi

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} &= 3 + 2 \sin 2x, \\ \frac{2}{2 \sin x \cos x} &= 3 + 2 \sin 2x, \\ 3 \sin 2x + 2 \sin^2 2x &= 2. \end{aligned}$$

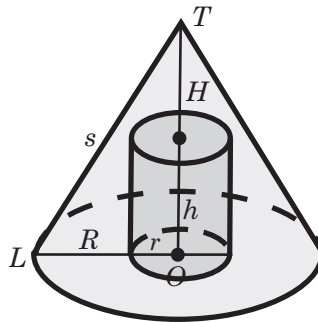
Uvođenjem smene  $\sin 2x = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$

čija su rešenja  $t_1 = -2$  i  $t_2 = 1/2$ . S obzirom na uvedenu smenu rešenje  $t_1$  odbacujemo, pa su rešenja jednačine data sa

$$x_k = \frac{(12k+1)\pi}{12}, \quad x_k = \frac{(12k+5)\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**30.5.** Centar osnova kupe i valjka je označen sa  $O$ , teme kupe sa  $T$  i još jedno teme osnog preseka sa  $L$ .



Kako je  $h = H/2$ , prema Pitagorinoj teoremi iz pravouglog trougla  $OLT$  sledi

$$s^2 = R^2 + H^2, \quad H^2 = s^2 - R^2 = 25 - 9 = 16,$$

odakle je

$$H = 4, \quad h = 2.$$

Osnove, omotači i zapremine kupe i valjka su

$$\begin{aligned} B_1 &= R^2\pi = 9\pi, & B_2 &= r^2\pi = \pi; \\ M_1 &= R\pi s = 15\pi, & M_2 &= 2r\pi h = 4\pi; \\ V_1 &= \frac{B_1 H}{3} = 12\pi, & V_2 &= B_2 h = 2\pi. \end{aligned}$$

Izdubljena kupa se sastoji od omotača kupe, kružnog prstena  $B_1 - B_2$ , omotača valjka i osnove valjka, pa je njena površina

$$\begin{aligned} P &= M_1 + (B_1 - B_2) + M_2 + B_2 = M_1 + B_1 + M_2 \\ &= 15\pi + 9\pi + 4\pi = 28\pi. \end{aligned}$$

Zapremina izdubljene kupe je

$$V = V_1 - V_2 = 12\pi - 2\pi = 10\pi.$$

**30.6.** Vrednost datog izraza možemo da izračunamo direktno

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = 3 + 3 = 6,$$

ili na sledeći način. Označimo sa

$$A = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}.$$

Očigledno je  $A > 0$ . Kvadriranjem prethodne jednakosti dobija se

$$A^2 = 11 + 6\sqrt{2} + 11 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{121 - 72} = 36,$$

odakle je  $A = 6$ .

## Test 31

**31.1.** Vrednost izraza je 250.

**31.2.** Stavimo  $y = \sqrt{x + 4}$ . Tada je  $x = y^2 - 4$ , pa je  $2x - 6 = 2y^2 - 14$ . Sada, data jednačina postaje

$$\sqrt{2y^2 - 14} + y = 5.$$

Kvadriranjem dobijamo jednačinu

$$y^2 + 10y - 39 = 0,$$

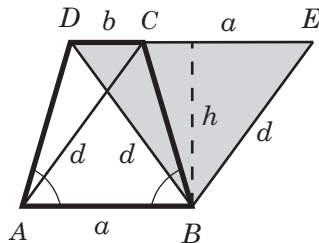
čija su rešenja  $y_1 = 3$  i  $y_2 = -13$ . S obzirom na uslov  $y \geq 0$ , uzimamo samo  $y = 3$ , odakle je  $x = 5$ . Proverom vidimo da je ovo zaista rešenje polazne jednačine.

**31.3.** Rešenje je  $x \in (-5, -1) \cup (1, 5)$ .

**31.4.** Primenom trigonometrijskih transformacija na dati izraz dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x} &= \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin x (\sin 2x + \cos 2x)} \\ &= \frac{2(\sin 2x + \cos 2x)}{2 \sin x (\sin 2x + \cos 2x)} = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

**31.5.** Neka je  $ABCD$  jednakokraki trapez sa osnovicama  $a = AB$  i  $b = DC$ , a  $d$  ma koja njegova dijagonala.



Prvo pokazujemo da su dijagonale jednakokrakog trapeza jednake. Trouglovi  $ABC$  i  $ABD$  imaju jednake stranice  $BC$ ,  $AD$  (kraci trapeza), zajedničku stranicu  $AB$  i jednake uglove  $\angle ABC$ ,  $\angle BAD$  (uglovi na osnovici trapeza). Prema pravilu SUS, ovi trouglovi su podudarni i zaista je  $AC = BD$ .

Osnovicu  $DC$  produžujemo od temena  $C$  do tačke  $E$  tako da je  $CE = AB = a$ . Tada je  $ABEC$  paralelogram jer su mu stranice  $AB$  i  $CE$  paralelne i jednake. Zato je i  $BE = AC = d$ .

Trougao  $BDE$  je jednakokranični sa stranicom  $d$ , što sledi iz definicije srednje linije trapeza  $m = (a+b)/2$  i uslova zadatka  $d = 2m = a+b$ . Na osnovu obrasca za visinu jednakokraničnog trougla, visina  $h$  trougla  $BDE$  je

$$h = \frac{d\sqrt{3}}{2} = m\sqrt{3}.$$

Visina trougla  $BDE$  je istovremeno i visina trapeza  $ABCD$ , pa tražena površina iznosi

$$P = \frac{a+b}{2}h = mh = m^2\sqrt{3}.$$

**31.6.** Cena robe bi se smanjila za 60 dinara.

### Test 32

**32.1.** Vrednost izraza je  $\frac{11}{40}$ .

**32.2.** Uvedimo smenu  $\log_2(2^x + 1) = t$ . Kako je

$$\log_2(2^{x+1} + 2) = \log_2 2(2^x + 1) = \log_2 2 + \log_2(2^x + 1) = 1 + \log_2(2^x + 1),$$

dobijamo jednačinu

$$t(t + 1) = 2.$$

Odavde je  $t = -2$  ili  $t = 1$ . Za  $t = -2$  je  $\log_2(2^x + 1) = -2$ , odakle je  $2^x + 1 = 1/4$ , odnosno  $2^x = -3/4$ , što je nemoguće. Za  $t = 1$  imamo  $\log_2(2^x + 1) = 1$ , odakle nalazimo jedino rešenje ove jednačine  $x = 0$ .

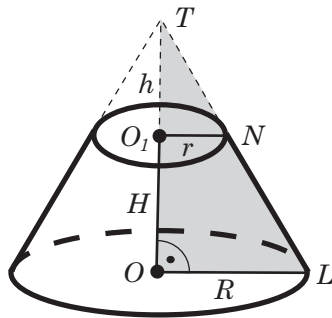
**32.3.** Rešenje je  $x \in (-4, -1) \cup (2, 5)$ .

**32.4.** Primenom adicijonih formula dobija se

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta) &= \cos(2\alpha + \beta) + \sin(\beta - 2\alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \beta - \sin 2\alpha \sin \beta + \sin \beta \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos \beta \\ &= (\sin \beta + \cos \beta)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha). \end{aligned}$$

Kako je  $0 < \alpha < \pi$  i  $\sin \alpha = 3/5$ , imamo da je  $\cos \alpha = \pm 4/5$ . S druge strane, kako je  $0 < \beta < \pi$  i  $\cos \beta = -12/13$ , imamo da je  $\sin \beta = 5/13$ . Tako izraz  $T(\alpha, \beta)$  može da ima dve vrednosti, i to su  $T_1(\alpha, \beta) = 119/325$  i  $T_2(\alpha, \beta) = -217/325$ .

**32.5.** Osnovna i zarubljena kupa imaju istu osu koja prolazi kroz centre  $O$ ,  $O_1$  baza zarubljene i teme  $T$  osnovne kupe. Prava zarubljena kupa nastaje iz prave osnovne kupe, pa visine  $OT$ ,  $H = OO_1$ ,  $h = O_1T$  osnovne, zarubljene i dopunske kupe leže na osi. Dva temena osnog preseka zarubljene kupe su  $L$ ,  $N$ .



Trouglovi  $OLT$  i  $O_1NT$  su slični jer su im stranice paralelne, pa važi  $OT : OL = O_1T : O_1N$ , tj.

$$\frac{H+h}{R} = \frac{h}{r}.$$

Zato je

$$\frac{2+h}{3} = \frac{h}{1}, \quad 2+h = 3h, \quad 2h = 2$$

i za visinu dopunske kupe se dobija

$$h = 1.$$

Neka je  $B_1$  veća, a  $B_2$  manja baza zarubljene kupe, koja je istovremeno i baza dopunske kupe. Tada je

$$B_1 = R^2\pi = 9\pi, \quad B_2 = r^2\pi = \pi.$$

Zapremine  $V$ ,  $V_1$  zarubljene i dopunske kupe su

$$V = \frac{(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)H}{3} = \frac{(9\pi + \sqrt{9\pi^2} + \pi) \cdot 2}{3} = \frac{26\pi}{3},$$

$$V_1 = \frac{B_2 h}{3} = \frac{\pi}{3},$$

pa je njihov odnos

$$\frac{V}{V_1} = 26.$$

Dakle, zarubljena kupa ima 26 puta veću zapreminu od dopunske kupe.

**32.6.** Racionalisanje vršimo na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}} &= \frac{1}{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) + (2 + \sqrt{10})} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - (2 + \sqrt{10})}{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - (2 + \sqrt{10})} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{10}}{5 + 4\sqrt{10} + 8 - 4 - 4\sqrt{10} - 10} \\ &= 2 + \sqrt{10} - \sqrt{5} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

## Test 33

**33.1.** Vrednost izraza je 11.

**33.2.** Jednačina

$$\sqrt{(3x+8)(x+3)} = 2$$

je definisana za  $x \in (-\infty, -3] \cup [-8/3, +\infty)$  i ima dva rešenja

$$x_1 = -4, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Jednačina

$$\sqrt{3x+8}\sqrt{x+3} = 2$$

je definisana za  $x \in [-8/3, +\infty)$  i ima samo jedno rešenje

$$x = -\frac{5}{3}.$$

**33.3.** Rešenje je  $x \in (-\infty, -9/8] \cup [0, +\infty)$ .

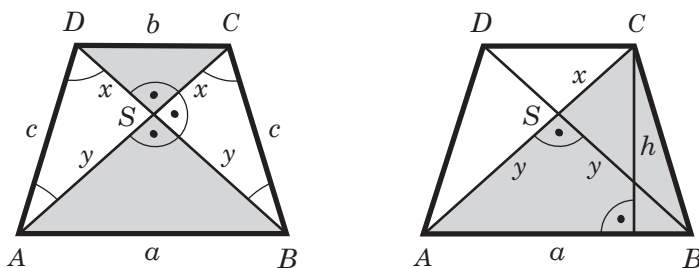
**33.4.** Jednačinu rešavamo na sledeći način

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= -1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\frac{\pi}{4} &= 0, \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\frac{x}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Rešenja jednačine su

$$x_k = (2k+1)\pi, \quad x_k = \frac{(4k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**33.5.** Neka je  $ABCD$  jednakokraki trapez sa osnovicama  $AB = a = 8$ ,  $CD = b = 6$ , krakom  $c$  i presekom dijagonala  $S$ .



Posmatramo prvu sliku i pokazujemo da u bilo kom jednakokrakom trapezu važi

$$SA = SB = y, \quad SC = SD = x.$$



U tom cilju uočavamo trouglove  $SDA$  i  $SBC$ . Trouglovi  $ABC$  i  $ABD$  su podudarni (zadatak 31.5), pa imaju jednake uglove, tj.  $\angle BDA = \angle ACB$ ,  $\angle BAD = \angle ABC$ ,  $\angle ABD = \angle BAC$ , odakle je i

$$\begin{aligned}\angle SDA &= \angle BDA = \angle ACB = \angle SCB, \\ \angle SAD &= \angle BAD - \angle BAC = \angle ABC - \angle ABD = \angle SBC.\end{aligned}$$

Prema pravilu USU, trouglovi  $SDA$  i  $SBC$  su podudarni jer imaju jednake stranice  $AD$ ,  $BC$  (kraci trapeza) i na njim nalegle uglove.

Uočavamo sada trouglove  $SAB$  i  $SCD$  sa prve slike. Ovi trouglovi su pravougli prema pretpostavci zadatka. Primenom Pitagorine teoreme sledi  $2x^2 = b^2$ ,  $2y^2 = a^2$  i, na osnovu datih podataka,  $x^2 = 36/2 = 18$ ,  $y^2 = 64/2 = 32$ , tj.

$$x = 3\sqrt{2}, \quad y = 4\sqrt{2}.$$

Vraćamo se na trougao  $SBC$ , koji je takođe pravougli sa katetama  $x$ ,  $y$  i nalazimo hipotenuzu, tj. krak trapeza,

$$c = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18 + 32} = 5\sqrt{2}.$$

Trougao  $ABC$  sa druge slike ima visinu  $SB = y = 4\sqrt{2}$  koja odgovara stranici  $AC = x + y = 7\sqrt{2}$ . Ako sa  $h$  označimo visinu koja odgovara stranici  $a$ , za površinu  $P_1$  trougla  $ABC$  važi

$$P_1 = \frac{AC \cdot SB}{2} = \frac{ah}{2},$$

odakle je

$$h = \frac{AC \cdot SB}{a} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{8} = 7.$$

Konačno, obim i površina trapeza su

$$O = a + b + 2c = 8 + 6 + 10\sqrt{2} = 14 + 10\sqrt{2},$$

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{8+6}{2} \cdot 7 = 49.$$

### 33.6. Označimo sa

$$A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Sada je

$$A^3 = 4 + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2(2 - \sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})^2} = 4 - 3A,$$

tj.

$$A^3 + 3A - 4 = 0,$$

odakle je

$$(A - 1)(A^2 + A + 4) = 0,$$

pa je

$$A = 1.$$

### Test 34

**34.1.** Rezultat je  $3^{3/5} \cdot 5^{2/3} \cdot 2^{-1/2}$ .

**34.2.** Deljenjem date jednačine sa  $13^x$  dobijamo

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Za  $x < 2$  važi

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2,$$

te je

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1.$$

Analogno, za  $x > 2$  važi

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{12}{13}\right)^2,$$

pa je

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1.$$

Direktnom proverom vidimo da je jedino rešenje jednačine  $x = 2$ .

**34.3.** Da bi nejednačina bila definisana neophodno je da bude  $x^2 > 0$ ,  $2x + 3 > 0$ ,  $2x + 3 \neq 1$ , tj.  $x > -3/2$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ .

Pretpostavimo, najpre, da je  $0 < 2x + 3 < 1$ , odnosno  $-3/2 < x < -1$ . Tada je data nejednačina ekvivalentna sa

$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3),$$

odnosno  $x^2 > 2x + 3$ , tj.  $(x + 1)(x - 3) > 0$ . Odavde je  $x < -1$  ili  $x > 3$ , pa zbog uslova  $-3/2 < x < -1$ , dobijamo da su rešenja svi brojevi iz intervala  $(-3/2, -1)$ .

Ako je  $2x + 3 > 1$ , tj.  $x > -1$ , dobijamo

$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3),$$

što je ekvivalentno sa  $x^2 < 2x+3$ , odnosno  $-1 < x < 3$ , pa je rešenje proizvoljan broj iz intervala  $(-1, 3)$ .

Znači, rešenja date nejednačine su realni brojevi

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 3).$$

**34.4.** Imamo

$$\begin{aligned}\cos 2x - \cos x - \sin x &= 0, \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) &= 0, \\ (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Rešavamo prvo jednačinu

$$\sin x + \cos x = 0,$$

tj.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0,$$

odakle je

$$x_k = \frac{(4k-1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

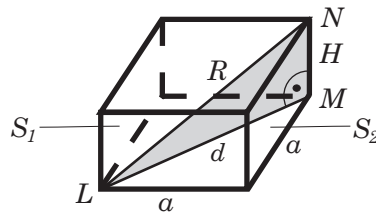
Jednačina  $\cos x - \sin x - 1 = 0$  ekvivalentna je sa

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\frac{\pi}{4} &= 0, \\ -2 \sin\frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) &= 0,\end{aligned}$$

odakle je

$$x_k = 2k\pi, \quad x_k = \frac{(4k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**34.5.** Jedan par temena  $L$ ,  $N$  naspramnih strana  $S_1$ ,  $S_2$  prizme, čije je rastojanje najveće, uočen je na sledećoj slici. Prema uslovu zadatka, ovo rastojanje je jednako poluprečniku  $R$  sfere. Uočeno je i teme  $M$  strane  $S_2$ .



Prizma je pravilna, pa je njena baza kvadrat stranice  $a = 4$ , a ivice su jednake visini  $H = 2$ . Dijagonala kvadrata je

$$d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Prema Pitagorinoj teoremi, iz pravouglog trougla  $LMN$  sledi

$$R^2 = d^2 + H^2 = 32 + 4 = 36$$

i poluprečnik sfere iznosi

$$R = 6.$$

Površina i zapremina sfere su

$$P = 4R^2\pi = 144\pi, \quad V = \frac{4R^3\pi}{3} = 288\pi.$$

**34.6.** Ako je  $v$  brzina voza, onda je  $30v = 300$ , pa je  $v = 10$  m/s. Prema tome, voz se kretao brzinom od 36 km/h. Dužina voza je  $d = 10 \cdot 15 = 150$  m.

## Test 35

**35.1.** Vrednost izraza je 1.2.

**35.2.** Oblast definisanosti jednačine

$$\log_2 x(x+1) = 1$$

je  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ . Ona ima dva rešenja

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Oblast definisanosti jednačine

$$\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$$

je  $x \in (0, +\infty)$ . Ona ima samo jedno rešenje

$$x = 1.$$

**35.3.** Nejednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(5-x)(x+1)} < 0.$$

Rešenje ove nejednačine je  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$ .

**35.4.** Kako je

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x) (\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) \\ &= \cos^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - 3 \cos^2 x \sin^2 x \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3 \cos^2 x \sin^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x,\end{aligned}$$

data jednačina se može napisati u obliku

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 4 \sin^2 2x,$$

tj.

$$19 \sin^2 2x = 4.$$

Koristeći jednakost

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2},$$

poslednja jednačina se svodi na sledeću jednačinu

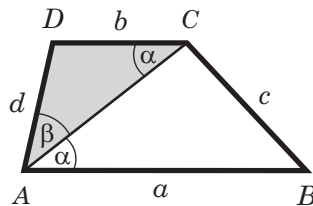
$$\cos 4x = \frac{11}{19},$$

čija su rešenja

$$x_k = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{11}{19} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**35.5.** Sa  $ABCD$  označimo trapez u kome je  $a = AB$  veća i  $b = CD$  manja osnovica,  $c = BC$  veći i  $d = AD$  manji krak. Pretpostavimo da dijagonala  $AC$  polovi ugao  $\angle BAD$  i uvedimo oznake  $\alpha = \angle BAC$ ,  $\beta = \angle CAD$ . Uslovi zadatka sada glase:

$$c = d + 4, \quad c = a - 2, \quad b + c + d = 40, \quad \alpha = \beta.$$



Kako su  $\alpha$  i  $\angle ACD$  uglovi s paralelnim kracima, to je  $\angle ACD = \alpha = \beta$ , pa je trougao  $ACD$  jednakokraki i sledi

$$b = d.$$

Iz uslova  $a = c + 2$ ,  $c = d + 4$  dalje sledi

$$a = (d + 4) + 2 = d + 6.$$

Zamenom  $b = d$  i  $c = d + 4$  u uslov  $b + c + d = 40$ , određuje se

$$d = 12.$$

Konačno, stranice trapeza su:

$$a = d + 6 = 18, \quad b = d = 12, \quad c = d + 4 = 16, \quad d = 12.$$

Ako dijagonala  $BD$  polovi ugao  $\angle ABC$ , radi se analogno i dobija se:

$$a = \frac{50}{3}, \quad b = c = \frac{44}{3}, \quad d = \frac{32}{3}.$$

**35.6.** Na osnovu Vietovih pravila za datu kvadratnu jednačinu je

$$x_1 + x_2 = m, \quad x_1 x_2 = 2m - 7.$$

Sada dati uslov postaje

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \frac{4}{5} &= x_1 + x_2, \quad m \neq \frac{7}{2}, \\ \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} &= (x_1 + x_2) - \frac{4}{5}, \\ \frac{m^2 - 2(2m - 7)}{2m - 7} &= \frac{5m - 4}{5}. \end{aligned}$$

Oдавde dobijamo kvadratnu jednačinu

$$5m^2 - 23m - 42 = 0,$$

čije je jedino celobrojno rešenje  $m = 6$ .

Zbir kubova rešenja jednačine je

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= 216 - 90 = 126. \end{aligned}$$

## Test 36

**36.1.** Rezultat je  $\frac{13}{15}$ .

**36.2.** Uslov egzistencije date jednačine je  $xy > 0$ . Na osnovu nejednakosti

$$\left(\sqrt{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy + \frac{1}{xy} \geq 2,$$

pri čemu jednakost nastupa za  $xy = 1$ , zaključujemo da je

$$\log_2 \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \geq 1.$$

Jednakost važi samo za  $xy = 1$ , pa kako je  $(x + y - 2)^2 \geq 0$  imamo da je  $1 - (x + y - 2)^2 \leq 1$ , pri čemu jednakost važi samo ako je  $x + y - 2 = 0$ .

Na osnovu prethodne analize, zadatak se svodi na rešavanje sistema jednačina

$$xy = 1, \quad x + y - 2 = 0,$$

koji ima jedinstveno rešenje  $(x, y) = (1, 1)$ .

**36.3.** Za  $x \geq 0$  imamo da je  $|x| = x$ , pa se data nejednačina sređivanjem svodi na

$$\frac{-x^2 + 5x - 12}{x - 3} \geq 0.$$

Kako je  $-x^2 + 5x - 12 < 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ , prethodna nejednakost važi za  $x \in [0, 3)$ .

Za  $x < 0$  imamo da je  $|x| = -x$ , pa se data nejednačina sređivanjem svodi na

$$\frac{-x^2 + 7x - 12}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad \wedge \quad x \neq 3.$$

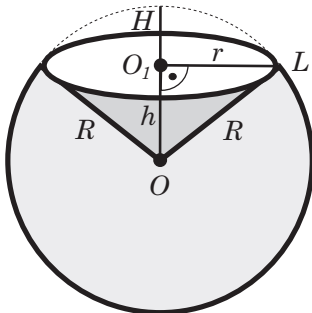
S obzirom na to da smo ovu nejednakost dobili za  $x < 0$ , rešenja u ovom slučaju su  $x \in (-\infty, 0)$ .

Rešenje zadatka je  $x \in (-\infty, 3)$ .

**36.4.** Transformacijom polazne jednačine dobija se

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 5x - \sin 2x &= 0, \\ 2 \cos 6x \cos x - 2 \sin x \cos x &= 0, \\ 2 \cos x (\cos 6x - \sin x) &= 0, \\ 2 \cos x \left( \cos 6x - \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

**36.5.** Sferni isečak se sastoji od prave kupe sa temenom u centru  $O$  sfere i pripadne kalote (sferni odsečak). Kupa ima visinu  $h = OO_1$ , izvodnicu  $s = R$  i poluprečnik baze  $r = O_1L$ .



Kako je  $h + H = R$ , visina kupe je

$$h = R - H = 4.$$

Prema Pitagorinoj teoremi, iz pravougloug trougla  $OO_1L$  sledi

$$r^2 = R^2 - h^2 = 25 - 16 = 9,$$

pa je poluprečnik baze kupe

$$r = 3.$$

Površina kalote i omotač kupe su

$$P_1 = 2R\pi H = 10\pi, \quad M = r\pi s = r\pi R = 15\pi.$$

Površina  $P$  izdubljene sfere se dobija kada se od površine sfere oduzme površina kalote i doda omotač kupe, tj.

$$P = 4R^2\pi - P_1 + M = 100\pi - 10\pi + 15\pi = 105\pi.$$

Zapremina  $V$  izdubljene sfere se dobija kada se od zapremine sfere oduzme zapremina  $V_1$  isečka. Kako je

$$V_1 = \frac{2R^2\pi H}{3} = \frac{50\pi}{3},$$

to je

$$V = \frac{4R^3\pi}{3} - V_1 = \frac{500\pi}{3} - \frac{50\pi}{3} = \frac{450\pi}{3} = 150\pi.$$

**36.6.** Neka je  $x$  dužina puta. Tada je

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 6.8 = 6 \left( x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x - 6.8 \right) \Leftrightarrow x = 21 \text{ km.}$$



Dakle, prvog dana je prešao 7 km, što je oko 33.33% puta, drugog dana 4.2 km, što je 20% puta, trećeg dana 6.8 km, što je oko 32.38% i četvrtog dana 3 km, što je oko 14.29%.

### Test 37

**37.1.** Vrednost izraza je  $\frac{843}{50}$ .

**37.2.** Rešenja su  $x_1 = -2$  i  $x_2 = 1$ .

**37.3.** Razlikovaćemo dva slučaja.

1° Za  $0 < x^2 - 1 < 1$  i  $x > 1/3$ , odnosno  $1 < x < \sqrt{2}$  nejednačina je ekvivalentna sa

$$3x - 1 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Dakle, u ovom slučaju rešenje je  $x \in (1, \sqrt{2})$ .

2° Ako je  $x^2 - 1 > 1$  i  $x > 1/3$ , tj.  $x > \sqrt{2}$ , nejednačina je ekvivalentna sa

$$0 < 3x - 1 < x^2 \Leftrightarrow 3x - 1 > 0 \wedge x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

U ovom slučaju rešenje je svako  $x \in ((3 + \sqrt{5})/2, +\infty)$ .

Dakle, rešenje date nejednačine je  $x \in (1, \sqrt{2}) \cup ((3 + \sqrt{5})/2, +\infty)$ .

**37.4. a)** Kako je  $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ , dobijamo

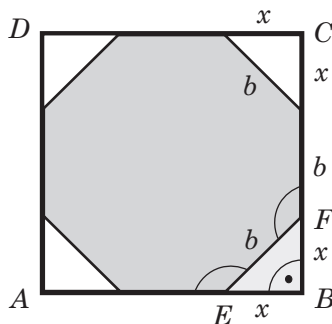
$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{14}} \left( \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{14}} \left( \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{14}} \left( \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**b)** Dati izraz transformisaćemo na sledeći način i koristićemo prethodno dobijeni

rezultat:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{7} \left( \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \cos \frac{9\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{7\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( -\cos \frac{2\pi}{7} - 1 + \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( -\cos \frac{2\pi}{7} - 1 + \frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{7} \right) = -\frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

- 37.5.** Na sledećoj slici su prikazani kvadrat  $ABCD$  i pravilni osmougao, čija temena  $E, F$  pripadaju stranicama  $AB, BC$  kvadrata.



Uglovi svakog pravilnog mnogougla, pa i osmougla, su jednaki. Zato je  $\angle AEF = \angle EFC$ , a time je i  $\angle BEF = \angle BFE$ . Dakle, trougao  $BFE$  je jednakokraki. Kako je ovaj trougao pravougli, to je  $\angle BEF = \angle BFE = 45^\circ$ . Isto važi za sve odstranjene trouglove. Ovi trouglovi su podudarni prema pravilu USU jer imaju jednake hipotenuze (stranice pravilnog osmougla) i jednake uglove na hipotenzama (svi su  $45^\circ$ ).

Označimo sa  $x$  katetu, a sa  $b$  hipotenuzu trougla  $BFE$ , tj. stranicu osmougla. Prema Pitagorinoj teoremi je

$$b^2 = x^2 + x^2 = 2x^2, \quad b = x\sqrt{2}.$$

Još je

$$BC = a = x + b + x = 2x + b,$$

pa sledi

$$\begin{aligned}
 a &= 2x + x\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})x = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)x, \\
 x &= \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Površine kvadrata i svakog od odstranjenih trouglova su

$$P_1 = a^2, \quad P_2 = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{4},$$

a površina osmougla je

$$P = P_1 - 4P_2 = a^2 - a^2 (\sqrt{2} - 1)^2 = a^2 \left(1 - (\sqrt{2} - 1)^2\right) = 2a^2 (\sqrt{2} - 1).$$

**37.6.** Zamenom  $z = x + iy$  u datoj jednačini dobija se

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova ovih kompleksnih brojeva sledi

$$y = 1.$$

Sada je

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = 2,$$

odakle dobijamo

$$x = \frac{3}{4}.$$

Znači, traženi kompleksan broj je

$$z = \frac{3}{4} + i.$$

## Test 38

**38.1.** Vrednost izraza je 1.

**38.2.** Kako je

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty), \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in (-1, 3), \end{cases}$$

a  $|x^2 - 2x + 5| = x^2 - 2x + 5$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ , imamo dva slučaja.

1° Za  $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$  jednačina postaje

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 5,$$

tj.  $-3 = 5$ , što je nemoguće, pa je očigledno da u ovom slučaju rešenje ne postoji.

2° Za  $x \in (-1, 3)$  jednačina postaje

$$-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 5,$$

tj.  $2x^2 - 4x + 2 = 0$ . Njeno dvostruko rešenje je  $x = 1$ , što je i jedino rešenje polazne jednačine.

**38.3.** Uvođenjem smene  $5^x = t$ ,  $t > 0$ , dobija se nejednačina

$$t^2 - 6t + 5 < 0,$$

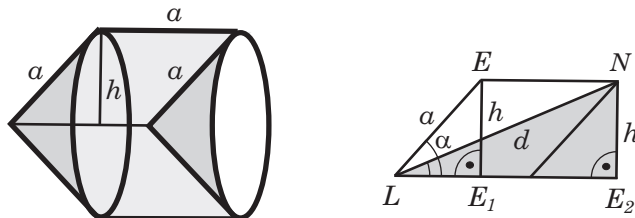
tj.  $(t - 1)(t - 5) < 0$ . Odavde je  $t \in (1, 5)$ , pa je rešenje  $x \in (0, 1)$ .

**38.4.** Dati izraz uprošćemo na sledeći način

$$A = \frac{\sin^3(270^\circ - \alpha) \cos(\alpha - 360^\circ)}{\tan^3(90^\circ - \alpha) \cos^3(270^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos^3 \alpha \cos \alpha \sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha (-\sin^3 \alpha)} = \cos \alpha.$$

Prethodne jednakosti imaju smisla za  $\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$  i  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**38.5.** Obrtno telo se sastoji od pravog valjka kojem je dodata prava kupa i iz njega izdubljena ista takva kupa. Visina valjka je  $H = a$ , gde je  $a$  stranica romba koji rotira (prva slika). U rombu su tri temena označena sa  $L$ ,  $N$ ,  $E$ , dok su  $E_1$ ,  $E_2$  podnožja visine  $h$  (druga slika).



Posmatramo drugu sliku. Veća dijagonala polovi oštar ugao romba. Zato je  $\angle NLE_2 = \alpha/2 = 30^\circ$  i iz pravouglog trougla  $LE_2N$  sledi  $h/d = \sin 30^\circ = 1/2$ , odakle je

$$h = \frac{d}{2} = 2.$$

Dalje, iz pravouglog trougla  $LE_1E$  je  $h/a = \sin \alpha = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ , pa je

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Posmatramo sada prvu sliku. Visina romba je poluprečnik  $R$  zajedničke osnove  $B$  valjka i kupe, a stranica romba je izvodnica  $s$  kupe, tj.

$$R = h = 2, \quad s = a = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ako je  $M_1$  omotač kupe, a  $M_2$  omotač valjka, dobija se

$$B = R^2\pi = 4\pi, \quad M_1 = R\pi s = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}, \quad M_2 = 2R\pi H = 2R\pi a = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}.$$

Površina obrtnog tela je zbir omotača valjka i dva omotača kupe, dok je zapremina jednaka zapremini valjka. Dakle, tražene površina i zapremina su

$$P = M_2 + 2M_1 = \frac{32\pi}{\sqrt{3}}, \quad V = BH = Ba = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}.$$

**38.6.** Neka je

$$A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Kako je

$$A^3 = 40 + 6A$$

i jednačina

$$A^3 - 6A - 40 = 0,$$

tj.

$$(A - 4)(A^2 + 4A + 10) = 0$$

ima jedinstven realni koren  $A = 4$ , što je i vrednost datog izraza.

## Test 39

**39.1.** Vrednost izraza je  $\frac{33}{1175}$ .

**39.2.** Primitimo da za  $x \geq 1$  važe jednakosti

$$\begin{aligned} x + 3 - 4\sqrt{x-1} &= (\sqrt{x-1} - 2)^2, \\ x + 8 - 6\sqrt{x-1} &= (\sqrt{x-1} - 3)^2. \end{aligned}$$

Sada, data jednačina postaje

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1,$$

i definisana je za svako  $x \geq 1$ . Razmotrićemo četiri slučaja.

1° Neka je  $\sqrt{x-1} - 2 \geq 0$  i  $\sqrt{x-1} - 3 \geq 0$ , tj. neka je  $x \geq 10$ . U ovom slučaju jednačina ima jedinstveno rešenje  $x = 10$ .

2° Ako je  $\sqrt{x-1} - 2 \geq 0$  i  $\sqrt{x-1} - 3 \leq 0$ , tj. ako je  $5 \leq x \leq 10$ , tada je jednakost zadovoljena za svako  $5 \leq x \leq 10$ .

3° U slučaju kada je  $\sqrt{x-1} - 2 \leq 0$  i  $\sqrt{x-1} - 3 \leq 0$ , tj. za  $x \leq 5$ , jednačina ima jedinstveno rešenje  $x = 5$ .

4° Za  $\sqrt{x-1} - 2 \leq 0$  i  $\sqrt{x-1} - 3 \geq 0$ , jednačina, očigledno, nema rešenja.

Dakle, rešenje date jednačine je  $5 \leq x \leq 10$ .

**39.3.** Dajemo uputstvo. Nejednačina je definisana za  $x \geq 1$  i može da se napiše u ekvivalentnom obliku

$$\log_3 27x > 5\sqrt{\log_3 x},$$

odnosno

$$\log_3 x + 3 > 5\sqrt{\log_3 x}.$$

Sada uvesti smenu  $\log_3 x = t^2$ ,  $t \geq 0$ .

**39.4.** Sledeće jednačine su ekvivalentne:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$(\sin x + \cos x - 1) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 0,$$

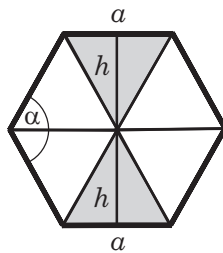
$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Iz poslednje jednačine dobijamo rešenja

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**39.5.** Simetrale uglova pravilnog šestougla se seku u istoj tački i formiraju šest trouglova koji sa šestouglom imaju zajedničku po jednu stranicu  $a$ .



Primenom obrasca za zbir uglova  $n$ -tougla, a imajući u vidu jednakost uglova u pravilnom  $n$ -touglu, izračunavamo ugao pravilnog šestougla

$$\alpha = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Simetrala ugla polovi ugao, pa svi trouglovi imaju po dva jednaka ugla  $\alpha/2 = 60^\circ$ , što znači da su jednakostranični. Kako su stranice trouglova jednake stranici  $a$  šestougla, oni su i podudarni (pravilo USU ili SSS).

Ako je  $h$  visina trougla, iz utvrđene podudarnosti i uslova zadatka sledi

$$d = 2h = 2\sqrt{3}, \quad h = \sqrt{3}.$$

Za visinu jednakostraničnog trougla važi

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

odakle je

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 2.$$

Obim šestougla je

$$O = 6a = 12.$$

Površina jednog trougla je

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3},$$

pa je površina šestougla

$$P = 6P_1 = 6\sqrt{3}.$$

- 39.6.** Prvi traktor za jedan sat izore  $1/15$  polja, a drugi izore  $1/20$  polja. Ako su oba traktora orala  $x$  sati zajedno, onda iz uslova zadatka dobijamo jednačinu

$$\frac{x}{15} + \frac{x}{20} = \frac{14}{15}.$$

Odavde je  $x = 8$ .

## Test 40

- 40.1.** Vrednost datog izraza odredićemo na sledeći način

$$A = 10^2 \cdot \frac{\left(\frac{154}{25} \cdot \frac{5}{77} + \frac{100}{125}\right) \cdot \left(\frac{15}{1000} \cdot \frac{100}{12} + \frac{7}{10}\right)}{\frac{12}{10} \cdot \frac{8}{3} - \frac{2}{10}} = 100 \cdot \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{33}{40}}{\frac{30}{10}} = 33.$$

- 40.2.** Za  $x \geq 2$  dobijamo identitet. Ako je  $1 \leq x < 2$ , dobijamo jednačinu  $4x = 8$ , koja nema rešenja u datom intervalu. Za  $0 \leq x < 1$  dobija se jednačina  $-2x = 2$ ,

koja, takođe, nema rešenja u ovom intervalu. U slučaju  $-1 \leq x < 0$  sledi  $0 = 2$ , što je nemoguće. Konačno, za  $x < -1$  dobijamo rešenje  $x = -2$ . Dakle, rešenje je  $x = -2$  ili  $x \geq 2$ .

- 40.3.** Nejednačina je definisana za svako  $x \neq -1$ . Ako datu nejednačinu napišemo u ekvivalentnom obliku

$$5^{\frac{3x-1}{x+1}} > 5^{2x+14},$$

dobijamo nejednačinu

$$\frac{3x-1}{x+1} > 2x+14,$$

tj.

$$\frac{(x+5)(2x+3)}{x+1} < 0.$$

Rešenje poslednje nejednačine je  $x \in (-\infty, -5) \cup (-3/2, -1)$ .

- 40.4.** Stavimo  $\sin x + \cos x = t$ . Kako je  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ , to je

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} (t^2 - 1),$$

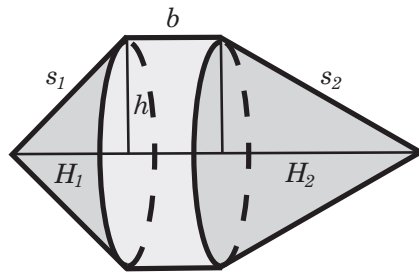
pa se data jednačina svodi na jednačinu

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

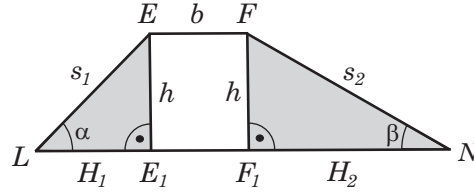
Rešenja ove jednačine su  $t_1 = 1$  i  $t_2 = -3$ . Drugo rešenje odbacujemo, jer je  $\sin x + \cos x > -2$ , pa su rešenja polazne jednačine

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 40.5.** Obrtno telo se sastoji od pravog valjka i dve prave kupe. Visina  $H$  valjka je kraća osnovica trapeza koji rotira, tj.  $H = b$ . Izvodnice  $s_1, s_2$  kupa su kraci trapeza (prva slika). Temena trapeza su  $L, N, E, F$ , a  $E_1, F_1$  su podnožja njegove visine  $h$  (druga slika).







Posmatramo drugu sliku. Neka je  $H_1 = LE_1$ ,  $H_2 = F_1N$ . Iz pravougljih trouglova  $LE_1E$  i  $F_1NF$  sledi

$$\frac{h}{H_1} = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1, \quad \frac{h}{H_2} = \tan \beta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

pa je

$$H_1 = h, \quad H_2 = h\sqrt{3}.$$

Kako je

$$a = LN = LE_1 + E_1F_1 + F_1N = H_1 + b + H_2,$$

to je

$$4 + \sqrt{3} = h + 1 + h\sqrt{3}, \quad 3 + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})h, \quad \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})h,$$

odakle je

$$h = \sqrt{3}, \quad H_1 = \sqrt{3}, \quad H_2 = 3.$$

Iz istih pravougljih trouglova se primenom Pitagorine teoreme dobija

$$s_1^2 = H_1^2 + h^2 = 3 + 3 = 6, \quad s_2^2 = H_2^2 + h^2 = 9 + 3 = 12,$$

pa su kraci trapeza

$$s_1 = \sqrt{6}, \quad s_2 = 2\sqrt{3}.$$

Posmatramo prvu sliku. Valjak i obe kupe imaju isti poluprečnik  $R$  baze, koji je jednak visini trapeza, tj.

$$R = h = \sqrt{3}.$$

Tada su omotači kupa

$$M_1 = R\pi s_1 = 3\sqrt{2}\pi, \quad M_2 = R\pi s_2 = 6\pi,$$

a omotač valjka je

$$M_3 = 2R\pi H = 2R\pi b = 2\sqrt{3}\pi.$$

Površina obrtnog tela je zbir nađenih omotača i iznosi

$$P = M_1 + M_2 + M_3 = (3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{3})\pi.$$

Zajednička baza valjka i kupe je

$$B = R^2 \pi = 3\pi.$$

Visine kupa su  $H_1$ ,  $H_2$ , pa su njihove zapremine

$$V_1 = \frac{BH_1}{3} = \sqrt{3}\pi, \quad V_2 = \frac{BH_2}{3} = 3\pi.$$

Kako je zapremina valjka

$$V_3 = BH = Bb = 3\pi,$$

za zapreminu obrtnog tela se dobija

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = (\sqrt{3} + 6) \pi.$$

**40.6.** Neka je početna cena zlata bila  $x$ . Posle prvog dana, nakon poskupljenja i pojeftinjenja, cena zlata je

$$x_1 = 120\% \cdot 80\% \cdot x = 0.96x.$$

Posle drugog dana cena je

$$x_2 = 0.96x_1 = 0.96^2 x.$$

Konačno, nakon 3 dana cena zlata je

$$x_3 = 0.96^3 x \approx 0.885x,$$

što je više od 80% prvobitne cene.

**KOMPLETI ZADATAKA  
SA RANIJIH ISPITA**



## JUN 1989. g.

1. Pravougli trougao ima poluprečnik opisanog kruga  $R = 15$ , a poluprečnik upisanog kruga  $r = 6$ . Odrediti dužine svih stranica trougla.
2. Izračunati vrednost izraza

$$I = \frac{3\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{80}} - \left(\frac{5}{4} \cdot \sqrt{0.8} - 5 \cdot \sqrt{0.2} - \sqrt{20}\right) - 10 \cdot \sqrt{0.2}}{3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} - \left(\sqrt{4\frac{1}{2}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}\right) + 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{9}} - 140 \cdot \sqrt{0.02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

3. Neka  $a_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) čine aritmetičku progresiju i neka je

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ako je  $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ , dokazati da tada važi i jednakost  $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ .

4. Rešiti jednačinu

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan x = \sqrt{3}.$$

5. Rešiti jednačinu

$$5^x \cdot \sqrt{x^{8x-1}} = 500 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

## JUN 1990. g.

1. Rešiti jednačinu

$$3^{\log \tan x} - 2 \cdot 3^{\log \cot x + 1} = 1 \quad (\log x \equiv \log_{10} x).$$

2. Odrediti sve vrednosti  $x \in \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju nejednakost

$$|x - 6| > |x^2 - 5x + 4|.$$

3. Rešiti jednačinu

$$\left(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x\right) \cdot \sin x + \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x\right) \cdot \cos x = 0.$$

4. Neka su  $R = 5$  i  $r = 2$  poluprečnici opisanog i upisanog kruga datog pravouglog trougla, respektivno. Naći površinu ovog trougla.

### SEPTEMBAR 1990. g.

1. Rešiti jednačinu

$$\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{1}{3} \cos x.$$

2. Uprostiti sledeće izraze:

a)  $A = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \left( \frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{-1/2}} \right) \cdot (a - b)^{-1};$

b)  $B = \left( \frac{3 - \sqrt{a}}{9 - a} + \frac{1}{3 - \sqrt{a}} - 6 \frac{a^2 + 162}{729 - a^3} \right)^{-1} + \frac{a(a + 9)}{54}.$

3. Naći sva rešenja jednačine

$$9x^2 - 18|x| + 5 = 0,$$

koja pripadaju oblasti definisanosti funkcije  $y = \log((x + 1)(x - 2))$ .

4. Rešiti jednačine:

a)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{4 \log 4}{9 \log 8},$

b)  $\log_3(4^x - 3) + \log_3(4^x - 1) = 1.$

### JUN 1991. g.

1. Naći celobrojnu vrednost  $k$  tako da nejednakost

$$x^2 - 2(4k - 1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$$

važi za svako realno  $x$ .

2. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{5}{2}, \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

3. Rešiti jednačinu

$$0.125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

4. Uprostiti izraze:

a)  $\frac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a};$

b)  $4 \cos^4 a - 2 \cos 2a - 0.5 \cos 4a.$

5. Srednja linija trapeza iznosi 10 cm. Ako ona deli površinu trapeza  $P$  na dva dela  $P_1$  i  $P_2$ , za koje je  $P_1 : P_2 = 3 : 5$ , odrediti dužine osnovica.

### JUN 1992. g.

1. Uprostiti izraz

$$\sin^6 t + \cos^6 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t.$$

2. Rešiti jednačinu

$$(0.4)^{\log^2 x + 1} = (6.25)^{2 - \log x^3} \quad (\log x = \log_{10} x).$$

3. Rešiti nejednačinu

$$\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$$

5. Visina i težišna linija povučene iz temena  $C$  trougla  $ABC$  dele ugao kod temena  $C$  na tri jednaka dela. Odrediti uglove trougla  $ABC$ .

### SEPTEMBAR 1992. g.

1. Odrediti sve realne brojeve  $x$  koji zadovoljavaju nejednakost

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > \frac{1}{x - 3}.$$

2. Rešiti jednačinu

$$(2 + \sqrt{3})^x + 3(2 - \sqrt{3})^x = 4.$$

3. Rešiti jednačinu

$$2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} = 0.$$

4. Dat je jednakokraki trougao čija je osnovica dužine 30 cm i poluprečnik upisanog kruga 7.5 cm. Odrediti površinu ovog trougla.

### JUN 1993. g.

1. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni jednačine

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0,$$

gde je  $p$  realni parametar. Dokazati nejednakost

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

2. Rešiti nejednačinu

$$(1 - \cos x)(1 + \cos 2x)(1 - \cos 3x) < \frac{1}{2}.$$

3. Rešiti jednačinu

$$9^x - 4^x = 3(3^{2x} - 6^x).$$

4. U krug poluprečnika  $R$  upisana su tri jednaka kruga, tako da dodiruju jedan drugog i dati krug. Izračunati površinu krivolinijskog trougla ograničenog upisanim krugovima.

### SEPTEMBAR 1993. g.

1. Dat je pravougli trougao čiji je poluprečnik opisanog kruga  $R = 15$  cm, a poluprečnik upisanog kruga  $r = 6$  cm. Odrediti dužine svih stranica trougla.



2. Rešiti jednačinu

$$5^x \cdot \sqrt{x} 8^{x-1} = 500 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

3. Rešiti jednačinu

$$\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{1}{3} \cos x.$$

4. Naći celobrojnu vrednost  $k$  tako da nejednakost

$$x^2 - 2(4k + 1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$$

važi za svako realno  $x$ .

### JUN 1994. g.

1. Cena zlata na berzi svako prepodne poraste za 10%, a svako poslepodne opadne za 10%. Da li će posle 50 dana rada berze cena zlata biti veća, manja ili jednaka polovini prvobitne cene?
2. Rešiti jednačinu

$$\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0.$$

3. Rešiti jednačinu

$$4^{-1/x} + 6^{-1/x} = 9^{-1/x}.$$

4. Data je prava  $p$  i tačke  $A$  i  $B$  van nje sa iste strane. Odrediti na pravoj  $p$  tačku  $M$  tako da je dužina  $AM + BM$  najkraća. Koliko ima rešenja? Dokazati da je tačka  $M$  dobro određena.
5. Odrediti najmanji prirodan broj koji je deljiv brojem 7, a koji prilikom deljenja brojevima 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1.

### JUN 1995. g.

1. Razlomak  $\frac{337}{140}$  prikazati kao zbir tri razlomka sa jednocifrenim imeniocima, pri čemu su brojioci prirodni brojevi. Detaljno obrazložiti postupak.
2. Rešiti jednačinu

$$25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125.$$

3. Za koje vrednosti parametra  $m$  važe nejednačine

$$-6 < \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0.$$

5. Oko kruga poluprečnika  $r = 1.5$  cm opisan je jednakokraki trapez površine  $P = 15$  cm<sup>2</sup>. Izračunati dužinu dijagonale ovog trapeza.

### SEPTEMBAR 1995. g.

1. Zbog oštećenog puta, autobus se kretao brzinom za 22% manjom od planirane. Za koliko procenata vozač mora povećati brzinu kretanja, da bi se kretao planiranom brzinom?
2. Izračunati vrednost izraza

$$Q = \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} - \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) : (x^2 - 2xy + y^2),$$

za  $x = 18.54$  i  $y = 71.46$ .

3. Zameniti \* prirodnim brojevima tako da važi

$$\frac{(* * 5) \cdot (4*)}{* 1 *}$$

$$\frac{* * 6 *}{* 7 * * *}$$

Naći sva moguća rešenja.

4. Naći zbir

$$A = \tan \alpha \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \tan 3\alpha + \cdots + \tan n\alpha \tan(n+1)\alpha.$$

5. Krug poluprečnika  $2r$  prolazi kroz centar kruga poluprečnika  $r$ . Zajedničke tangente ovih krugova dodiruju manji krug u tačkama  $A$  i  $B$  i seku se u tački  $C$ . Izračunati površinu figure  $ABC$  u zavisnosti od  $r$ , gde je  $AB$  manji luk datog kruga.

**JUN 1996. g.**

1. Uprostiti izraz

$$\frac{1 - 2 \sin x - \cos 2x}{1 + 2 \sin x - \cos 2x}$$

2. Rešiti jednačinu

$$2^{2x+2} + 5^{2x+2} - 29 \cdot 5^x \cdot 2^x = 0.$$

3. Naći rešenja date nejednačine

$$\frac{|x - 2|}{x^2 - 3x + 2} \geq 2.$$

4. Na krugu, sa centrom u tački  $O$ , poluprečnika 2 cm date su tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$ , koje dele krug u razmeri  $3 : 5 : 7$ . Izračunati uglove trougla  $ABC$ .
5. Dva voza istovremeno polaze iz mesta  $A$  i  $B$ , jedan drugom u susret. Svaki od njih se, čim stigne u suprotno mesto, odmah vraća nazad. Prvo susretanje vozova je na 50 km od mesta  $A$ , a drugo na 30 km od mesta  $B$ . Brzina vozova je stalna. Kolika je udaljenost između mesta  $A$  i  $B$ ?

**SEPTEMBAR 1996. g.**

1. Rešiti nejednačinu

$$|2x - 3| < x.$$

2. Dijagonalni presek pravilne četvorostrane piramide je ravnostran trougao površine
- $k^2\sqrt{3}$
- . Izračunati površinu i zapreminu piramide.

3. Rešiti jednačinu

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

4. Rešiti jednačinu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

5. Cena neke robe je najpre povećana za 20%, a posle mesec dana smanjena za 20%. Posle ove promene prvobitna cena se smanjila za 60 dinara. Za koliko dinara bi se smanjila prvobitna cena, ako bi najpre bila smanjena za 10%, a zatim ta nova cena povećana za 10%?

**JUN 1997. g.**

1. Zadat je trocifren broj  $A$ , čija je cifra stotica  $a$ , cifra desetica  $b$  i cifra jedinica  $c$ . Neka je zbir cifara broja  $A$  jednak 24. Ako cifre ciklično promene mesta, tako da cifra stotica bude  $c$ , cifra desetica  $a$ , a cifra jedinica  $b$ , dobija se broj koji je za 189 veći od prvobitnog. Ako cifre ponovo ciklično promene mesta, tako da je cifra stotica  $b$ , cifra desetica  $c$ , a cifra jedinica  $a$ , dobija se broj koji je za 108 veći od prvobitnog, tj od broja  $A$ . Odrediti prvobitni trocifreni broj.

2. Jedan daktilograf može da otkuca jedan tekst za 5 sati i 20 minuta, a drugi daktilograf isti tekst za 4 sata i 40 minuta. Ukoliko isti tekst kucaju istovremeno, tako što svaki daktilograf kuca samo jedan deo teksta, drugi će otkucati tri stranice više od prvog. Koliko stranica ima tekst?

3. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x+12} - \sqrt{x-8} = \sqrt{x+4}.$$

4. Uprostiti izraz

$$\frac{1 + \cos 4a + \sin 4a}{1 + \sin 4a - \cos 4a}.$$

5. U ravnostrani trougao  $ABC$ , stranice  $a$ , upisan je kvadrat maksimalne površine, tako da jedna stranica ovog kvadrata leži na osnovi trougla. Odrediti odnos površina trougla i kvadrata.

**SEPTEMBAR 1997. g.**

1. Rešiti sistem jednačina

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = A,$$

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = B,$$

gde je  $\alpha$  dati ugao  $0 < \alpha < 2\pi$ , a  $A$  i  $B$  dati realni brojevi. Naći vrednost izraza  $R = x^2 + y^2$ .

2. Odrediti parametar  $a$  tako da sistem jednačina

$$x^2 + ax + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + a = 0,$$

ima bar jedno rešenje.

3. Ako cifre jedinica i desetica zamene mesta, vrednost trocifrenog broja se poveća za 45. Isti broj se smanji za 270, ako cifre stotica i desetica zamene mesta. Ako cifre stotica i jedinica zamene mesta, dobiće se broj koji je veći od datog. Za koliko?
4. Jedan radnik završi generalnu popravku automobila za 10 dana. Ako mu u popravci 2 dana pomaže drugi radnik, onda će popravka biti završena za 6 dana. Za koliko dana bi generalnu popravku automobila završio drugi radnik?
5. Dat je pravougli trougao  $ABC$  sa pravim uglom u temenu  $C$  i poluprečnikom upisanog kruga  $r$ . Iz temena  $C$  povučena je visina  $h$ . Ova visina deli trougao na dva pravougla trougla čiji su poluprečnici upisanih krugova  $r_1$  i  $r_2$ . Dokazati da važi jednakost  $r + r_1 + r_2 = h$ .

### JUN 1998. g.

1. Rešiti nejednačinu  $1 < \left| \frac{2-x}{x+1} \right| < 2$ .
2. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni jednačine

$$x^2 + px - \frac{a}{p^2} = 0,$$

gde je  $a = (2 + \sqrt{2})^{-1}$  i  $p$  ( $p \neq 0$ ) realni parametar. Dokazati nejednakost

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2.$$

3. Rešiti jednačinu  $\cos x + \cot x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos \left( \frac{7\pi}{2} + x \right)$ .
4. Ako je  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{31}{32}$ , odrediti  $\sin^2 2x$ .
5. Simetrala ugla između stranice i dijagonale romba seče drugu stranicu romba pod uglom od  $72^\circ$ . Odrediti uglove romba.

### SEPTEMBAR 1998. g.

1. Odrediti zbir kvadrata najmanje i najveće vrednosti funkcije

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$$

na segmentu  $[0, 2]$ .

2. Brojna vrednost izraza

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

je ceo broj. Naći taj broj.

3. Uprostiti izraz

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha - 1)}.$$

4. Rešiti jednačinu

$$64^x - 8^{x+1} + 7 = 0.$$

5. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x^2 + 6}{x^2 - 2x - 8} < -1.$$

## JUN 2000. g.

1. Racionalisati razlomak

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 2}.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$$

3. Rešiti jednačinu

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\cos x - 2 \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = 3.$$

5. Romb stranice 6 cm i manje dijagonale 4 cm rotira oko ose koja prolazi kroz kraj veće dijagonale i normalna je na jednu stranicu romba. Odrediti površinu tako dobijenog tela.

**SEPTEMBAR 2000. g.**

1. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni jednačine  $x^2 - (m + 1)x + 2m - 1 = 0$ , gde je  $m$  realan parametar. Odrediti  $m$  tako da važi jednakost  $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$ .
2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{5x + 4} - \sqrt{3x + 1} = 5.$$

3. Rešiti jednačinu  $\log_5(x + 3) = 3 - x$ . Rešenje ilustrovati odgovarajućim graficima.
4. Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  uglovi datog trougla za koje važi jednakost

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}.$$

Dokazati da je trougao pravougli.

5. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{1}{1/4} \left[ \left( \frac{1}{0.25} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( -\frac{1}{0.5} \right)^3 \left( -\frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{0.8} \right)^2 \right] : \left( 2 - \frac{1}{2} \right)^2.$$

**JUN 2001. g.**

1. Za koju vrednost realnog parametra  $m$  suma kvadrata korena jednačine

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

dostiže minimalnu vrednost. Za tako dobijeno  $m$  rešiti datu jednačinu.

2. Rešiti jednačinu

$$4 \sin^4 2x + \sin^2 4x = 2.$$

3. Rešiti jednačinu

$$x + \log_{10}(1 + 2^x) = x \log_{10} 5 + \log_{10} 6.$$

4. a) Uzastopni uglovi nekog četvorougla su uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza (progresije), kod koga je razlika  $d = 20^\circ$ . Dokazati da je četvorougao trapez.  
b) Ako su uzastopni uglovi nekog četvorougla  $\alpha$ ,  $\alpha + 30^\circ$ ,  $\alpha + 50^\circ$  i  $\alpha + 80^\circ$ , dokazati da je u pitanju trapez.

5. Ako se pravi valjak preseče jednom ravni paralelno njegovoj osi, izračunati površinu preseka u funkciji od poluprečnika  $r$ , visine  $H$  i rastojanja  $d$  od ose valjka. Zatim izračunati površinu preseka za  $d = r\sqrt{3}/2$ .

### SEPTEMBAR 2001. g.

1. U jednačini

$$(m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0,$$

odrediti realan parametar  $m$  tako da važi jednakost

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2.$$

Proveriti dobijeni rezultat.

2. Odrediti vrednosti  $x$  za koje je funkcija

$$f(x) = \log_{1/2} \left( \log_{1/3} \frac{x+1}{x-1} \right)$$

negativna.

3. Rešiti nejednačinu

$$\left( \frac{3}{4} \right)^{\cos 3x} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4. Dokazati da je izraz  $S(n) = 5^{4n-2} + 3^{4n-2}$ , gde je  $n \in \mathbb{N}$ , deljiv sa 34.  
 5. Osnovna ivica pravilne šestostrane prizme iznosi 3 m, a dijagonala bočne strane 6 m. Izračunati njenu zapreminu i površinu.

### JUN 2002. g.

1. U zavisnosti od vrednosti realnog parametra  $m$  odrediti međusobni položaj prave  $2x - y = 0$  i parabole  $y = x^2 + (2 - m)x + m + 1$ .  
 2. Rešiti nejednačinu

$$(0.2)^{(2x-3)/(x-2)} > 5.$$

3. Uprostiti izraz

$$\left[ \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a^{3/2} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b^{3/2}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b} \right]^{-3}.$$



4. a) Ako su  $a$  i  $b$  katete, a  $c$  hipotenuza pravouglog trougla, dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a+b}{c} \leq \sqrt{2}.$$

- b) Izračunati površinu pravouglog trougla kod koga je dužina hipotenuze 4 cm, a jedan oštar ugao iznosi  $11^\circ 15'$ .
5. Odrediti zapreminu pravilne dvanaestostrane zarubljene piramide ako su poluprečnici kružnica opisanih oko osnova  $R$  i  $r$ , a bočne ivice nagnute pod uglom  $60^\circ$  prema ravni veće osnove.

### SEPTEMBAR 2002. g.

1. Izračunati vrednost izraza

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} : \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}.$$

2. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} \sqrt{12+x} + \sqrt{x-9} &= 7, \\ y^2 - x + 4y + 13 &= 0. \end{aligned}$$

3. Množenjem sa  $\sin x$ , ili na neki drugi način, dokazati da važi identitet

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\cos 5x}{\sin 4x \sin 6x} + \frac{\cos 7x}{\sin 6x \sin 8x} = \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin x \sin 2x \sin 8x}.$$

4. Koristeći jednakost

$$\sqrt{2}\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1},$$

ili na neki drugi način, odrediti prirodan broj  $m$  za koji važi jednakost

$$\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1^2 - 1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m + \sqrt{m^2 - 1}}} \right) = \sqrt{101} + 9.$$

5. Da li će se promeniti površina pravougaonika i za koliko procenata ako se jedna njegova dimenzija poveća za 30%, a druga smanji za 30%?

**JUN 2003. g.**

1. Odrediti koje vrednosti može da uzima realan parametar  $m$ , tako da tačno jedno rešenje kvadratne jednačine

$$x^2 + x + 2^m - 4 = 0$$

leži u intervalu  $(-1, 1)$ .

2. Rešiti jednačinu

$$\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2.$$

3. Ako je  $z = x + iy$ , rešiti jednačinu

$$|z| + z = 2 + i.$$

4. Trougao je ograničen  $x$ -osom i pravama  $5x + 12y = 60$  i  $3x + 4y = 12$ . Naći koordinate temena i površinu ovog trougla.
5. Omotač prave kupe, u razvijenom obliku, predstavlja kružni isečak sa centralnim uglom  $36^\circ$  i površinom od  $110\pi \text{ cm}^2$ . Odrediti površinu i zapreminu ove kupe.

**SEPTEMBAR 2003. g.**

1. Izračunati vrednost izraza

$$\frac{3\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}.$$

2. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni jednačine

$$x^2 - (m + 1)x + 2m - 1 = 0,$$

gde je  $m$  realan parametar. Odrediti  $m$  tako da kvadratni trinom na levoj strani date jednačine bude pozitivan za svako  $x$ .

3. Rešiti nejednačinu

$$\sin x + \cos 2x > 1.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0.$$

5. Odrediti zapreminu lopte, opisane oko prave pravilne četvorostране prizme visine 2 cm i osnovne ivice 4 cm.

### JUN 2004. g.

1. Data je kvadratna jednačina

$$x^2 + 4x - 21 = 0,$$

čija su rešenja  $x_1$  i  $x_2$ . Ne rešavajući ovu jednačinu, odrediti vrednost izraza

$$I = \frac{3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2}{x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3}.$$

2. Rešiti nejednačinu

$$1 + \log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x + \dots > 0.$$

3. Rešiti jednačinu

$$4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} = -4.$$

4. Jednakokraki trapez, čije su osnovice dužina  $a = 20$  cm i  $b = 8$  cm, a krak  $c = 10$  cm, rotira oko ose koja leži u njegovoj ravni, ne seče ga i paralelna je većoj osnovici trapeza na odstojanju  $d = 2.5$  cm od nje. Izračunati zapreminu i površinu tako dobijenog tela.

5. a) Uprostiti izraz

$$\frac{\sin 130^\circ \cos 330^\circ \tan(270^\circ - \alpha) \cot 225^\circ}{\sin 270^\circ \cos 220^\circ \tan 210^\circ \cot(180^\circ - \alpha)}.$$

- b) Rešiti jednačinu

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

**SEPTEMBAR 2004. g.**

1. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni jednačine  $x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0$ , gde je  $m$  realan parametar. Odrediti  $m$  tako da koreni budu realni i da važi nejednakost

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} \leq 1.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{5x+4} + \sqrt{3x+1} = 5.$$

3. Ako je  $\log_5 2 = a$  izračunati  $\log_2 5$ ,  $\log_8 125$  i  $\log_{40} 25$  u funkciji od  $a$ .
4. Odrediti ugao  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \pi/4)$ , tako da je  $\sin \alpha = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$ .
5. Ivice pravouglog paralelopipeda odnose se kao  $a : b : c = 2 : 3 : 6$ , a dužina njegove dijagonale je  $D = 35$  cm. Izračunati njegovu površinu i zapreminu.

**JUN 2005. g.**

1. Rešiti jednačinu

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

2. Odrediti za koje vrednosti promenljive  $x$  funkcija

$$f(x) = \log_{0.5} \frac{3x^2 - 5x - 3}{4x - 3}$$

ima pozitivne vrednosti.

3. Odrediti kompleksan broj  $z = x + iy$ , za koji važi

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

4. Odrediti jednačinu zajedničke tangente elipse (E) i parabole (P), gde je

$$(E) : 20x^2 + 45y^2 = 900, \quad (P) : y^2 = 20x/3.$$

5. Dat je jednakokraki trapez, čija je srednja linija  $m = 10$  cm i dijagonala  $d = 20$  cm. Izračunati njegovu površinu.

**SEPTEMBAR 2005. g.**

1. Odrediti najmanji zajednički sadržalac (NZS) i najveći zajednički delilac (NZD) za polinome

$$p_1(x) = x^4 - x^2, \quad p_2(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \text{i} \quad p_3(x) = x^2 - 1.$$

2. Uprostiti izraz

$$\frac{\sin^2 x \tan^2 x - 2 \sin^2 x + \cos^2 x}{\tan^2 x - 1}.$$

3. Rešiti jednačinu

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0.$$

4. Dva prečnika kruga leže na pravama  $x + y - 14 = 0$  i  $2x - 3y + 12 = 0$ . Ako se zna da krug prolazi kroz koordinatni početak, naći njegovu jednačinu.
5. Osnova piramide je pravougaonik sa stranicama  $a = 12$  cm i  $b = 9$  cm, a bočne ivice piramide su međusobno jednake i iznose  $c = 12.5$  cm. Odrediti zapreminu piramide.

**JUN 2006. g.**

1. Rešiti nejednačinu

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+2|/(1-|x|)} > 9.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\sin 19x + \cos 19x = \sqrt{2} \cos 23x.$$

3. Odrediti vrednost izraza

$$5^{\log_{0.2} 0.5} + \log_{\sqrt{2}} \left( \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \right) + \log_{0.5} \left( \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}} \right).$$

4. U tački  $A(1, y < 0)$  parabole  $y^2 = 16x$  povučene su tangenta i normala na parabolu. Izračunati površinu trougla ograničenog tangentom, normalom i  $x$ -osom.
5. U jednakostraničan trougao, čija je stranica  $a = 6$  cm upisan je krug. Iznad (pored) ovog kruga, takođe u unutrašnjosti trougla, upisan je novi

krug, koji dodiruje prethodni i dve bočne stranice trougla. Izračunati zbir površina i zbir obima ovih krugova.

### SEPTEMBAR 2006. g.

1. Rešiti jednačinu

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24.$$

2. Rešiti nejednačinu

$$||2x + 1| - 5| > 2.$$

3. Odrediti kompleksan broj  $z = x + iy$  za koji važi

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

4. Dokazati identitet

$$\frac{3}{2} \cos^4 x - \cos^6 x + \frac{3}{2} \sin^4 x - \sin^6 x = \frac{1}{2}.$$

5. Odrediti zapreminu pravilne četvorostране piramide, čija je visina  $H = 15$  cm, a površina dijagonalnog preseka  $P_d = 120$  cm<sup>2</sup>.

### JUN 2007. g.

1. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja kvadratne jednačine  $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$ , gde je  $m$  realan parametar. Odrediti za koje vrednosti ovog parametra važi nejednakost

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 3.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{49}{27}\right)^x = \frac{49}{81}.$$

3. Ako je  $\log_4 11 = a$  i  $\log_4 13 = b$ , odrediti vrednost izraza

$$(\log_{11} 13 + \log_{13} 11)^{-1}.$$

4. Ugao između izvodnice i visine prave kružne kupe je  $60^\circ$ , razlika njihovih dužina je 5. Izračunati zapreminu kupe.
5. Rešiti jednačinu  $\sin 2x + \cos x = 0$ .

### SEPTEMBAR 2007. g.

1. Ako za neko  $\alpha \in (0, \pi/4)$  važi  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2/5$ , izračunati

$$\sin \alpha - \cos \alpha.$$

2. Rešiti jednačinu

$$7^x + 7^{1-x} = 8.$$

3. Data je jednačina

$$x^2 + (a - 1)x + 3 + a - 4a^2 = 0 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Ako su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine, odrediti vrednost izraza

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

4. Osnova prave prizme je romb. Njen omotač iznosi  $M = 48$ , dijagonala bočne strane je  $d = 5$ , a najkraće rastojanje naspramnih bočnih strana jednako je visini prizme. Izračunati njenu zapreminu.
5. Rešiti jednačinu

$$\cos 2x + 4 \cos x + 3 = 0.$$

### JUN 2008. g.

1. Rešiti jednačinu  $\sin 2x + \cos x = 0$ .
2. Data je kvadratna jednačina  $x^2 - 2(m + 1)x + (m + 3) = 0$ . Odrediti vrednosti parametra  $m$ , za koje su oba korena jednačine realna i pozitivna.

3. Rešiti jednačinu

$$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1) = 2.$$

4. Odrediti visinu pravilnog tetraedra (trostrana, jednakoivična piramida) čija je zapremina  $V = \sqrt{3}$ .

5. Rešiti jednačinu  $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ .

### SEPTEMBAR 2008. g.

1. Ako za neko  $\alpha \in (0, \pi/4)$  važi  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2/5$ , izračunati

$$\sin \alpha + \cos \alpha.$$

2. Izračunati vrednost izraza

$$A = \left( \frac{6}{1 - \sqrt{3}} - \frac{2}{1 + \sqrt{3}} + \frac{5}{2 - \sqrt{3}} \right) (8 + \sqrt{3})^{-1}.$$

3. Rešiti jednačinu

$$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1) = 2.$$

4. Odrediti visinu pravilnog tetraedra (trostrana, jednakoivična piramida) čija je zapremina  $V = \sqrt{3}$ .

5. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{4x+5}.$$

### JUN 2009. g.

1. Ako za neko  $\alpha \in (0, \pi/4)$  važi  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2/5$ , izračunati

$$\sin \alpha - \cos \alpha.$$

2. Rešiti jednačinu

$$7^x + 7^{1-x} = 8.$$



3. Data je jednačina

$$x^2 + (a - 1)x + 3 + a - 4a^2 = 0 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Ako su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine, odrediti vrednost izraza

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

4. Osnova prave prizme je romb. Njen omotač iznosi  $M = 48$ , dijagonala bočne strane je  $d = 5$ , a najkraće rastojanje naspramnih bočnih strana jednako je visini prizme. Izračunati njenu zapreminu.

5. Rešiti jednačinu

$$\cos 2x + 4 \cos x + 3 = 0.$$

### SEPTEMBAR 2009. g.

1. Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{49}{27}\right)^x = \frac{49}{81}.$$

2. Dokazati jednakost

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}.$$

3. Data je jednačina

$$x^2 + (a - 1)x + 3 + a - 4a^2 = 0 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Odrediti parametar  $a$  tako da data jednačina ima realna rešenja.

4. Izračunati zapreminu kosog valjka čiji je jedan osni presek romb stranice  $a$  i oštrog ugla  $60^\circ$ .

5. Rešiti jednačinu

$$2x^2 - 3|x| - 2 = 0.$$



## LITERATURA

- [1] **V. T. Bogoslavov**, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike I*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [2] **V. T. Bogoslavov**, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike II*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [3] **V. T. Bogoslavov**, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike III*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [4] **V. T. Bogoslavov**, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike IV*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [5] **В. А. Выменский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко**, *Сборник задач киевских математических олимпиад*, "Вища школа", Киев, 1984.
- [6] **Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь**, *Математические соревнования – арифметика и алгебра*, ФизМатЛит, Москва, 1970.
- [7] **Н. С. Залогин**, *Конкурсные задачи по математике*, "Техника", Киев, 1964.
- [8] **A. Zolić, V. Stojanović**, *Odabrani zadaci sa republičkih i pokrajinskih matematičkih takmičenja 7. i 8. razreda*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1992.
- [9] **Ž. Ivanović, S. Ognjanović**, *МАТЕМАТИКА 1 – Zbirka zadataka i testova za I razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1999.
- [10] **Ž. Ivanović, S. Ognjanović**, *МАТЕМАТИКА 2 – Zbirka rešenih zadataka za II razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1997.
- [11] **Ž. Ivanović, S. Ognjanović**, *МАТЕМАТИКА 3 – Zbirka rešenih zadataka za III razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1997.
- [12] **Ž. Ivanović, S. Ognjanović**, *МАТЕМАТИКА 4 – Zbirka zadataka i testova za IV razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1999.

- [13] **I. Ž. Milovanović, B. M. Randelović**, *REŠENI ZADACI za pripremu prijemnog ispita iz matematike*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2000.
- [14] **I. Ž. Milovanović, B. M. Randelović**, *MATEMATIKA – zbirka testova za prijemni ispit*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2007.
- [15] **S. Ognjanović, V. Kadelburg**, *MATEMATIKA 4<sup>+</sup> rešeni zadaci sa prijemnih ispita na univerzitetima u Srbiji od 1990. do 1995.*, Krug, Beograd, 1996.
- [16] **P. Protić, B. Stamenković, S. Tričković, N. Stevanović**, *Zbirka rešenih zadataka sa prijemnih ispita na Građevinsko–arhitektonskom fakultetu*, Građevinsko–arhitektonski fakultet, Niš, 1999.
- [17] **М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко**, *Алгебра, тригонометрия и элементарные функции*, Висшая школа, Москва, 2001.
- [18] **М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко**, *Конкурсные задачи по математике*, ФизМатЛит, Москва, 2003.
- [19] **К. А. Рыбников**, *Комбинаторный анализ – задачи и упражнения*, Наука, Москва, 1982.
- [20] **V. Stojanović**, *MATEMATISKOP: Kako da postanem šampion matematike*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [21] **D. Herceg**, *Matematičke formule*, Zmaj, Novi Sad, 2001.
- [22] **Г. Н. Яковлева**, *Пособие по математике для поступающие в вузы*, Наука, Москва, 1981.